

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
Направление 44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) Математика с основами информационных технологий (с использованием дистанционных образовательных технологий)

квалификация выпускника: бакалавр

Цель представленных методических материалов – оказать конкретную помощь студентам в развитии умения решать задачи по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, по дифференциальной геометрии и многомерной геометрии. Необходимость методических материалов связана с отсутствием учебного пособия по алгебре и геометрии, включающего многообразие задач с краткой предварительной теоретической частью, которые полностью соответствуют ФГОС ВО.

Аналитическая геометрия на плоскости

§1. Элементы векторной алгебры

Правило треугольника:

Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, соединяющий начало первого вектора $\vec{a}$ с концом второго вектора $\vec{b}$, при условии, что $\vec{b}$ приложен к концу $\vec{a}$ (рис.1).

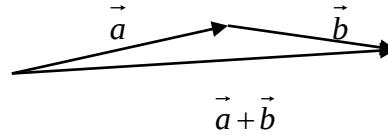


Рис. 1

Правило параллелограмма:

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то **сумма** $\vec{a} + \vec{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущий из общего начала $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.2).

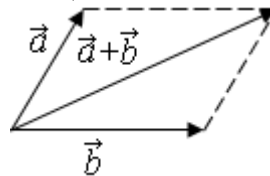


Рис.2

Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ составляет $\vec{a}$. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу, то разность их $\vec{a} - \vec{b}$ есть вектор, соединяющий конец «вычитаемого» $\vec{b}$ с концом «уменьшаемого» $\vec{a}$.

Произведением $\alpha \vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий условиям: 1) $|\vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}|$; 2) $\vec{b} \uparrow \vec{a}$, если $\alpha > 0$; 3) $\vec{b} \downarrow \vec{a}$, если $\alpha < 0$

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **равными**, если 1) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; 2) $\vec{a} \uparrow \vec{b}$.

Практические задания

1. Для произвольного треугольника ABC точки M , N и P – соответственно середины сторон AC , AB и BC . Среди указанных ниже пар векторов найти пары равных и пары коллинеарных, но неравных векторов: 1) $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{MP}$; 2) $\overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{PC}$; 4) $\overrightarrow{PC}$ и $\overrightarrow{BC}$; 5) $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MC}$; 6) $\overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{CM}$; 7) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{NP}$.

2. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения диагоналей, а E и F – соответственно середины параллельных сторон BC и AD . Построить на

чертеже следующие векторы:

- 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DF}$; 3) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OB}$; 5) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FO}$;
6) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{CD}$.

3. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения диагоналей, а точки N , M , P и Q – соответственно середины сторон AB , BC , CD и DA . Построить на чертеже следующие векторы:

- 1) $\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}$; 2) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{CP}$; 3) $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB}$; 4) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{PD}$; 5) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MQ}$;
6) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{NP}$; 7) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC}$.

4. Пусть $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, O – его центр. Полагая $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, выразить $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Дан параллелограмм $ABCD$ и произвольная точка O пространства. Доказать, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$. Доказать обратное утверждение: если для пространственного четырёхугольника $ABCD$ и некоторой точки O имеет место соотношение $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, то $ABCD$ – параллелограмм.

6. Начертить произвольный вектор $\vec{a}$ и построить векторы: $2\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\sqrt{2}\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-\frac{3}{5}\vec{a}$, $5\vec{a}$, $-\sqrt{3}\vec{a}$.

7. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: $4\vec{a}$, $-\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a})$, $2\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$, $3\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$, $\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}$.

8. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, проверьте на чертеже справедливость тождеств:

- 1) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$; 2) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$;
3) $(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}) - (\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}) = \vec{b}$.

9. В треугольнике ABC векторы $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BL}$ и $\overrightarrow{CM}$ направлены по медианам. Выразить их через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

10. Пусть ABC произвольный треугольник, а E и F – середины сторон AB и BC . Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.

11. Дан треугольник ABC и произвольная точка O пространства. Обозначим через M точку пересечения каких – либо двух медиан треугольника, а через $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_3$ соответственно векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

Доказать, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$.

12. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, а O – точка пересечения его диагоналей. Полагая $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$, выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

§2. Метод координат на плоскости

Базисом плоскости E_2 называется упорядоченная совокупность двух неколлинеарных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, т.е. $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Аффинным репером R называется совокупность точки O (начало репера) и базиса B , т.е. $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Ортонормированным базисом называется базис $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, векторы которого единичны $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ и взаимно перпендикулярны.

Репер $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ называется **ортонормированным** (прямоугольно-декартовым).

Координатами вектора $\vec{a}$ относительно базиса $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ называются коэффициенты в разложении $\vec{a}$ по векторам базиса, т.е. $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ и обозначается $\vec{a} \{x, y\}$.

Координатами точки M относительно репера R называются координаты радиус-вектора т. M , т.е. вектора $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, $M(x, y)_R$.

Если известны координаты точки $M_1(x_1; y_1)$ начала вектора и точки $M_2(x_2; y_2)$ конца вектора, то $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$.

Если точка $M(x, y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ , то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, если M середина отрезка M_1M_2 , то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ называется число равное $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ или

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \operatorname{pr}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

В ортонормированном репере $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$, где $\vec{a} \{a_1, a_2\}$, $\vec{b} \{b_1, b_2\}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Свойства скалярного произведения:

$$1^\circ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$2^\circ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$3^\circ (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$4^\circ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$5^\circ \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Практические задания

13. Пусть ABCD – параллелограмм, E и F – середины противоположных сторон BC и AD, а O – точка пересечения диагоналей. Взяв векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{AD} = \vec{e}_2$ за базисные, определить координаты следующих векторов:

1) $\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{OD}$; 3) $\overrightarrow{FC}$; 4) $\overrightarrow{BC}$; 5) $\overrightarrow{EO}$; 6) $\overrightarrow{BD}$; 7) $\overrightarrow{EA}$.

14. Решить предыдущую задачу в предположении, что за координатные векторы взяты $\vec{m}_1 = \overrightarrow{AF}$, $\vec{m}_2 = \overrightarrow{OD}$.

15. В правильном шестиугольнике ABCDEF векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$ и $\overrightarrow{AE} = \vec{e}_2$ выбраны в качестве базисных. Найти в данном базисе координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{EF}$.

16. В ромбе ABCD векторы $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{e}_2$ взяты за базисные. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$ в этом базисе.

17. В треугольнике ABC проведены медиана BK и средняя линия MN, параллельная AC. Прямые BK и MN пересекаются в точке O. Найти:

1) координаты векторов $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{NC}$ и $\overrightarrow{AN}$, принимая векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OM}$ за координатные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$;

2) координаты тех же векторов $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{NC}$ и $\overrightarrow{AN}$, принимая векторы $\overrightarrow{KC}$ и $\overrightarrow{KN}$ за координатные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

18. На плоскости даны два вектора $\vec{u} \{2,1\}$, $\vec{v} \{1,0\}$. Найти коэффициенты разложения вектора $\vec{a} \{9,1\}$ по векторам $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

19. Даны три вектора $\vec{u} \{3,-2\}$, $\vec{v} \{-2,1\}$, $\vec{w} \{7,-4\}$. Определить коэффициенты разложения каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

20. Даны векторы $\vec{u} \{3,-1\}$, $\vec{v} \{1,-2\}$, $\vec{w} \{-1,7\}$. Определить коэффициенты разложения вектора $\vec{p} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ по векторам $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

21. Векторы $\overrightarrow{AB} \{1,3\}$ и $\overrightarrow{AC} \{2,1\}$ совпадают со сторонами треугольника. Определить координаты векторов $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{BM_2}$, $\overrightarrow{CM_3}$, совпадающих с его медианами.

22. Даны векторы $\vec{a} \{1, -2\}$, $\vec{b} \{\frac{1}{2}, 1\}$, $\vec{c} \{2, 0\}$. Определить координаты векторов $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{1}{2}\vec{c}$, $\frac{3\vec{a} - 5\vec{b}}{2}$, $\frac{\vec{c} - 2\vec{b}}{3}$.

23. Даны векторы $\vec{a} \{3, -4\}$, $\vec{b} \{0, -3\}$, $\vec{c} \{3, \sqrt{7}\}$, $\vec{d} \{-1, 2\}$. Определить их модули.

24. Первая координата вектора $\vec{a}$ равна 6, а $|\vec{a}| = 2\sqrt{13}$. Определить вторую координату вектора $\vec{a}$.

25. Определить координаты единичных векторов (ортов), сонаправленных с векторами: 1) $\vec{m} \{-3, -4\}$; 2) $\vec{n} \{-1, 7\}$; 3) $\vec{p} \{-\sqrt{7}, 3\}$; г) $\vec{q} \{0, -2\}$.

26. Вычислить угол между следующими парами векторов:

- 1) $\vec{a}_1 \{1, 0\}$ и $\vec{a}_2 \{2, 2\}$; 2) $\vec{b}_1 \{1, 1\}$ и $\vec{b}_2 \{-1, \sqrt{3}\}$; 3) $\vec{c}_1 \{-\sqrt{3}, 3\}$ и $\vec{c}_2 \{0, 1\}$;
- 4) $\vec{d}_1 \{2, 0\}$ и $\vec{d}_2 \{1, -\sqrt{3}\}$.

27. Определить, какие из следующих пар векторов взаимно перпендикулярны:

- 1) $\vec{a}_1 \{2, 5\}$ и $\vec{b}_1 \{-10, 4\}$; 2) $\vec{a}_2 \{1, 2\}$ и $\vec{b}_2 \{1, -3\}$; 3) $\vec{a}_3 \{3, 1\}$ и $\vec{b}_3 \{2, -6\}$.

28. Чему равны проекции векторов $\vec{a} \{-1, 5\}$ и $\vec{b} \{\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\}$ на координатные оси $\vec{i}$ и $\vec{j}$?

29. Найти проекцию вектора $\vec{a} \{-7, -3\}$ на ось, определяемую вектором $\vec{b} \{3, 5\}$.

30. Дан треугольник ABC. Выразить вектор $\vec{h} = \overrightarrow{AH}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, где H – основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

31. На плоскости даны векторы $\vec{a} \{-1, 5\}$, $\vec{b} \{3, 5\}$, $\vec{c} \{-2, 8\}$, $\vec{d} \{3, 1\}$. Вычислить:

- 1) $\vec{a} \vec{b}$; 2) $\vec{a} \vec{c}$; 3) $\sqrt{\vec{d}^2}$; 4) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \vec{d}$; 5) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{c} - \vec{d})$.

32. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 2\pi/3$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить:

- 1) $\vec{a} \vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; ж) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$.

33. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\pi/3$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить:

- 1) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

34. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \pi/6$; зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

35. Даны две смежные вершины квадрата $A(3;-7)$ и $B(-1;4)$. Вычислить его площадь.

36. Вычислить площадь правильного треугольника, две вершины которого суть $A(-3;2)$ и $B(1;6)$.

37. Даны три вершины $A(3;-7)$, $B(5;-7)$, $C(-2;5)$ параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого D противоположна B . Определить длины диагоналей этого параллелограмма.

38. Вершины треугольника суть точки $A(5;0)$, $B(0;1)$ и $C(3;3)$. Вычислить его внутренние углы.

39. Даны вершины треугольника $A(1;-3)$, $B(3;-5)$ и $C(-5;7)$. Определить середины его сторон.

40. Даны точки $A(3;-1)$ и $B(2;1)$. Определить:

- 1) координаты точки M , симметричной точке A относительно точки B .
- 2) координаты точки N , симметричной точке B относительно точки A .

41. Даны три вершины параллелограмма $A(3;-5)$, $B(5;-3)$, $C(-1;3)$. Определить четвертую вершину D , противоположную B .

42. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(3;-5)$, $B(1;7)$ и точка пересечения его диагоналей $M(1;1)$. Определить две другие вершины.

43. Даны точки $A(1;-1)$, $B(3;3)$ и $C(4;5)$, лежащие на одной прямой. Определить отношение λ , в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими.

44. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $P(2;2)$ и $Q(1;5)$ разделен на три равные части.

45. Записать формулы преобразования общих декартовых систем координат на плоскости в каждом из следующих случаев, если даны координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе:

- 1) $\vec{e}_1' \{4; 3\}$, $\vec{e}_2' \{0; 5\}$, $O \{3; -1\}$; 2) $\vec{e}_1' \{1; 0\}$, $\vec{e}_2' \{0; 1\}$, $O \{2; 5\}$;
- 3) $\vec{e}_1' \{4; -1\}$, $\vec{e}_2' \{1; 1\}$, $O \{0; 0\}$; 4) $\vec{e}_1' \{1; 0\}$, $\vec{e}_2' \{1; 2\}$, $O \{2; 0\}$;
- 5) $\vec{e}_1' \{-1; 0\}$, $\vec{e}_2' \{0; 1\}$, $O \{0; -5\}$.

46. Написать формулы преобразования при переносе начало координат в

точку O в каждом из следующих случаев:

- 1) $O' (5; \sqrt{2})$; 2) $O' (-1; 0)$; 3) $O' (-1; -3)$; 4) $O' (5; \frac{1}{2})$.

47. Написать формулы преобразования координат при аффинном повороте в каждом из следующих случаев:

- 1) $\vec{e}_1' \{2; 1\}$, $\vec{e}_2' \{-2; 1\}$; 2) $\vec{e}_1' \{1; 0\}$, $\vec{e}_2' \{2; -\sqrt{2}\}$;
3) $\vec{e}_1' \{0; 1\}$, $\vec{e}_2' \{1; 0\}$; 4) $\vec{e}_1' \{0; -5\}$, $\vec{e}_2' \{1; 1\}$.

48. Определить координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе, если формулы преобразования имеют вид:

- 1) $\begin{cases} x = x' - 3y', \\ y = x' + y' + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y + 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = x' - y' + 1, \\ y = y'; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x' = x + y + 1, \\ y' = x - 5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = x', \\ y = y' + 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x. \end{cases}$

49. Написать формулы преобразования прямоугольных декартовых систем координат в каждом из следующих случаев:

- 1) $\vec{i}' = \frac{\sqrt{2}}{10}\vec{i} + \frac{7\sqrt{2}}{10}\vec{j}$, $O'(-3; \sqrt{2})$; системы $O\vec{i}\vec{j}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'$ имеют одну и ту же ориентацию;
2) $\angle(\vec{i}\vec{j}) = 30^\circ$, $O'(0; -2)$ системы $O\vec{i}\vec{j}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'$ имеют различные ориентации;
3) $\angle(\vec{i}\vec{j}) = 30^\circ$, $O'(0; -2)$ системы $O\vec{i}\vec{j}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'$ имеют одну и ту же ориентацию;
4) $\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$, $O'(2; -12)$; системы $O\vec{i}\vec{j}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'$ имеют различные ориентации.

50. Дан квадрат $ABCD$ со стороной равной a . Пусть направленные прямые AB и AD являются осями координат старой системы (AB – первая ось, AD – вторая). В каждом из следующих случаев написать формулы преобразования прямоугольных декартовых координат, если за новые координатные оси приняты направленные прямые:

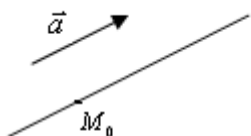
- 1) первая ось AC , вторая ось BD ;
2) первая ось CD , вторая ось CB ;
3) первая ось AD , вторая ось DC .

51. Даны две различные прямоугольные декартовые системы координат, причем вторая получена из первой переносом начала в точку $O'(5; \sqrt{11})$ без изменения направления осей. Найти расстояние d между точками A и B , если B имеет те же координаты во второй системе, что и A в первой.

§3. Прямая на плоскости

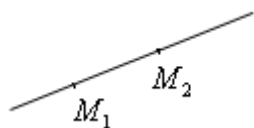
3.1. Различные способы задания прямой

1) В репере $R\{0; \vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ для прямой d , заданной точкой $M_0(x_0; y_0)$ и направляющим вектором $\vec{a} = \{a_1; a_2\}$ параметрические уравнения имеют вид:
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}$$



каноническое уравнение
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

2) Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид:
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$



3) Если $M_1(a; 0)$, $M_2(0; b)$, то получим уравнение в «отрезках»

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

4) Уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$ является уравнением прямой, которая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ и имеет угловой коэффициент k .

5) Уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ является уравнением прямой, заданной в $R\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$, которая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ и имеет нормальный вектор $\vec{a} = \{A; B\}$. Уравнение вида $Ax + By + C = 0$, $(A; B) \neq (0; 0)$ называется общим уравнением прямой, направляющий вектор которой $\vec{a} = \{-B; A\}$.

3.2. Взаимное расположение двух прямых

Если две прямые заданы уравнениями

$$d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то возможны следующие случаи их взаимного расположения:

а) прямые пересекаются тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2};$$

б) прямые параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2};$$

в) прямые совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};$$

3.3. Расстояние от точки до прямой, угол между двумя прямыми

В ортонормированном репере $R = \{0; \bar{i}; \bar{j}\}$ расстояние от точки M_0 ($x_0; y_0$) до прямой $d: Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле $\rho(M_0, d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$,

$\cos(d_1, d_2) = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ - угол между прямыми

Практические задания

52. Написать уравнение прямой:

- 1) проходящей через точки $A(-1; 1)$ и $B(2; 5)$;
- 2) проходящей через начало координат и точку $A(2; 5)$;
- 3) проходящей через точку $A(2; -6)$ и параллельной вектору $\bar{p} \{1; -1\}$;
- 4) отсекающей на осях координат отрезки $a = 3, b = -2$;
- 5) проходящей через точку $A(3; 5)$ и параллельной оси Ox ;
- 6) проходящей через точку $B(-1; 2)$ и параллельной оси Oy ;
- 7) проходящей через точку $A(1; -5)$ и параллельной прямой $x - 3y + 1 = 0$;
- 8) проходящей через точку $A(2; 2)$ и параллельной прямой $x + y = 0$.

53. Написать параметрическое уравнение прямой:

- 1) проходящей через точку $P(-2; 3)$ и параллельной вектору $\bar{p} \{5; -1\}$;
- 2) проходящей через две точки $M_1(0; -2), M_2(3; -4)$;
- 3) проходящей через начало координат и параллельной вектору $\bar{p} \{1; 1\}$;
- 4) проходящей через точку $M_0(1; -3)$ и параллельной оси Ox ;
- 5) проходящей через две точки $M_1(1; 2), M_2(1; -5)$.

54. Прямая задана параметрическими уравнениями

$$x = -1 + 4t, y = 2 - t.$$

- 1) найти направляющий вектор данной прямой;
- 2) определить координаты точек, имеющих параметры $t_1 = 3, t_2 = 0, t_3 = -2, t_4 = -1$;
- 3) определить параметры точек пересечения данной прямой с осями

координат; 4) среди точек $M_1(-3; 1)$, $M_2(3; 1)$, $M_3(15; -2)$, $M_4(0; -\frac{7}{4})$, $M_5(2; 2)$ найти точки, принадлежащие данной прямой.

55. Дан треугольник ABC координатами своих вершин $A(-1; 3)$, $B(0; 4)$, $C(-2; -2)$. Написать уравнение медианы этого треугольника, проведенной из вершины A .

56. Написать уравнения средних линий треугольника, вершины которого находятся в точках $A(2; 6)$, $B(-4; 0)$, $C(4; 2)$.

57. Даны три вершины треугольника $A(1; -2)$, $B(0; 3)$, $C(1; 1)$. Написать уравнения прямых, проходящих через каждую из них, параллельно противоположной стороне.

58. Показать, что четырехугольник $ABCD$, где $A(-2; -2)$, $B(-3; 1)$, $C(\frac{5}{2}; \frac{5}{2})$ и $D(3; 1)$, является трапецией. Составить уравнения средней линии и диагоналей этой трапеции.

59. Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма $x - y - 1 = 0$ и $x - 2y = 0$ и точка пересечения его диагоналей $F(3; -1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

60. Написать уравнение прямой:

- 1) проходящей через точку $A(2; 5)$ и имеющей угловой коэффициент $k = 3$;
- 2) проходящей через точку $(0; 0)$ и имеющей угловой коэффициент $k = -2$;
- 3) являющейся биссектрисой координатного угла $O\vec{i}\vec{j}$;
- 4) проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол $+30^\circ$;
- 5) проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол $+120^\circ$;
- 6) отсекающей от оси Oy отрезок $b = 2$ и имеющей угловой коэффициент $k = -3$;
- 7) отсекающей от оси Oy отрезок $b = -3$ и имеющей угловой коэффициент $k = 1$;

61. Написать уравнение прямой:

- 1) проходящей через точку $A(-1; 3)$ и перпендикулярной к вектору $\vec{n}\{2; 1\}$;
- 2) проходящей через точку $B(5; 10)$ и перпендикулярной к прямой $x - y + 1 = 0$;
- 3) проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой $2x - 3y + 1 = 0$;

62. Точка $H(-2; 5)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую l . Написать уравнение прямой l .

63. Точка $M(3;2)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из точки $M_1(1; -1)$ на прямую l . Написать уравнение прямой l .

64. Даны две вершины треугольника $A(-1; 5)$, $B(3; 2)$ и точка $H(5; -3)$ пересечения его высот. Составить уравнения его сторон.

65. Найти проекцию точки M , заданной координатами, на прямую l , заданную своим уравнением, в каждом из следующих случаев: 1) $M(5; -2)$, $(l) 2x - 3y - 3 = 0$;
2) $M(3; 3)$, $(l) x + y - 6 = 0$; 3) $M(0;8)$, $(l) 3x - y - 2 = 0$.

66. Определить координаты точки, симметричной началу координат относительно прямой $x - 4y + 17 = 0$.

67. Вершины треугольника находятся в точках $A(-4; -5)$, $B(4; 1)$, $C(-\frac{1}{2}; 7)$. Написать уравнения: 1) биссектрисы внутреннего угла A ; 2) медианы, проходящей через вершину A ; 3) высоты, опущенной из вершины C .

68. Даны вершины треугольника $A(7; 2)$, $B(-1; 6)$ и $C(5; 10)$. Составить уравнения сторон ромба $AMNP$, вписанного в треугольник так, что вершина M принадлежит стороне AB , вершина N – стороне BC и вершина P – стороне AC .

69. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $x + 3y + 12 = 0$ и $x + 3y - 8 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $2x + y + 4 = 0$.

70. Исследовать, как расположены относительно осей координат следующие прямые:

- | | |
|-----------------------|-------------------|
| 1) $2x - 3y = 0$; | 4) $3y + 1 = 0$; |
| 2) $3x - y + 1 = 0$; | 5) $x + 2y = 0$; |
| 3) $5x - 1 = 0$; | 6) $6x = 0$. |

71. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых и, в случае пересечения, определить координаты общей точки:

- 1) $x + y - 3 = 0$ и $2x - 2y - 6 = 0$;
- 2) $x + 2y + 1 = 0$ и $x + 2y + 3 = 0$;
- 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}x - 3y + \sqrt{3} = 0$ и $x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0$;
- 4) $y = 3$ и $x + y = 0$;
- 5) $x + y + 1 = 0$ и $x + y - 1 = 0$;
- 6) $x = 0$ и $x + 3 = 0$;
- 7) $\sqrt{5}x - 3y + 1 = 0$ и $\frac{5}{3}x - \sqrt{5}y + \frac{\sqrt{5}}{3} = 0$.

72. Найти расстояния от точек $A(1; 2)$, $B(-1; 3)$ и $C(1; 6)$ до прямой $3x - 4y - 1 = 0$.

73. Написать уравнение окружности с центром в точке $P(6; -3)$ и касающейся прямой $3x - 4y - 15 = 0$.

74. Найти расстояние между параллельными прямыми в каждом из следующих случаев:

- 1) $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$; 2) $3x - y + 6 = 0$, $6x - 2y - 1 = 0$;
3) $-3x + 4y + 2 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$; 4) $x + y - 5 = 0$, $2x + 2y + 9 = 0$.

75. Через точку $M(-1; 4)$ проведена прямая, расстояние от которой до точки $Q(-2; -1)$ равно 5. Составить ее уравнение.

76. В каждом из следующих случаев найти уравнения биссектрис углов, образованных прямыми:

- 1) $x - 3y + 2 = 0$ и $3x + y - 1 = 0$;
2) $x + 2y + 5 = 0$ и $4x - 2y - 3 = 0$;
3) $\sqrt{3}y - x = 12$ и $3x + 4y - 15 = 0$.

77. В каждом из следующих случаев показать, что треугольник, заданный уравнениями своих сторон, является равнобедренным:

- 1) $x + 5y + 8 = 0$, $8x + y - 14 = 0$, $7x - 4y + 17 = 0$;
2) $x - 2y + 6 = 0$, $x + y = 0$, $2x - y - 6 = 0$;
3) $x + y - 6 = 0$, $x - 4y + 14 = 0$, $4x - y - 19 = 0$;
4) $x + y + 9 = 0$, $4x - 7y + 25 = 0$, $7x - 4y - 14 = 0$.

78. Даны уравнение одной из сторон квадрата $x + 3y - 3 = 0$ и точка пересечения диагоналей $(-2, 0)$. Составить уравнения его диагоналей и остальных сторон. Определить координаты вершин квадрата.

79. Луч света направлен по прямой $x + y + 3 = 0$. Дойдя до прямой $3x - y + 5 = 0$, он отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

§4. Кривые второго порядка

4.1. Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $a > b$, a, b - длины полуосей.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса ($\varepsilon < 1$). Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами эллипса.

Практические задания

80. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

- 1) его полуоси равны 5 и 2;
- 2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c = 8$;
- 3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2c = 10$;
- 4) расстояние между его фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
- 5) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
- 6) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;
- 7) расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между его фокусами $2c = 4$;
- 8) его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами равно 16;
- 9) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;
- 10) расстояние между его директрисами равно 32 и $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

81. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

- 1) его полуоси равны соответственно 7 и 2;
- 2) большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c = 8$;
- 3) расстояние между его фокусами $2c = 24$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;
- 4) его малая ось равна 16, а расстояние между директрисами равно $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
- 5) расстояние между его фокусами $2c = 6$ и расстояние между его

директрисами равно $\frac{50}{3}$;

б) расстояние между его директрисами равно $\frac{32}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{4}$.

82. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

83. Дан эллипс $9x^2 + 5y^2 = 45$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

84. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{2}{5}$, расстояние от точки M эллипса до директрисы равно 20. Вычислить расстояние от точки M до фокуса, одностороннего с этой директрисой.

85. Дана точка $M_1(2; -\frac{5}{3})$ на эллипсе $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$; составить уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки M_1 .

86. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{1}{3}$, центр его совпадает с началом координат, один из фокусов $(-2; 0)$. Вычислить расстояние от точки M_1 эллипса с абсциссой, равной 2, до директрисы, односторонней с данным фокусом.

87. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:

1) точка $M_1(-2\sqrt{5}; 2)$ эллипса и его малая полуось $b = 3$;

2) точка $M_1(2; -2)$ эллипса и его большая полуось $a = 4$;

3) точки $M_1(4; -\sqrt{3})$ и $M_2(2\sqrt{2}; 3)$ эллипса;

4) точка $M_1(\sqrt{15}; -1)$ эллипса и расстояние между его фокусами $2c = 8$;

5) точка $M_1(2; -\frac{5}{3})$ эллипса и его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$;

- 6) точка $M_1(8; 12)$ эллипса и расстояние $r_1 = 20$ от нее до левого фокуса;
7) точка $M_1(-\sqrt{5}; 2)$ эллипса и расстояние между его директрисами, равно 10.

88. Составить уравнение эллипса, зная, что:

- 1) его большая ось равна 26 и фокусы суть $F_1(-10; 0)$, $F_2(14; 0)$;
- 2) его малая ось равна 2 и фокусы суть $F_1(-1; -1)$, $F_2(1; 1)$;
- 3) его фокусы суть $F_1(-2; \frac{3}{2})$, $F_2(2; -\frac{3}{2})$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- 4) его фокусы суть $F_1(1; 3)$, $F_2(3; 1)$ и расстояние между его директрисами равно $12\sqrt{2}$.

89. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C , полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:

- 1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;
- 2) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;
- 3) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

90. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$, фокус $F(2; 1)$ и уравнение соответствующей директрисы $x - 5 = 0$.

91. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$, фокус $F(-4; 1)$ и уравнение соответствующей директрисы $y + 3 = 0$.

4.2. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, $a < c$, a, b – длины полуосей.

Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

Директрисы гиперболы: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Асимптоты гиперболы: $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Практические задания

92. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того:

- 1) ее оси $2a = 10$ и $2b = 8$;
- 2) расстояние между фокусами $2a = 10$ и ось $2b = 8$;
- 3) расстояние между фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
- 4) ось $2a = 16$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
- 5) уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3} x$ и расстояние между фокусами $2c = 20$;
- 6) расстояние между директрисами равно $\frac{228}{13}$ и расстояние между фокусами $2c = 26$;
- 7) расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$ и ось $2b = 6$;
- 8) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
- 9) уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4} x$ расстояние между директрисами равно $\frac{64}{5}$.

93. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

- 1) ее полуоси $a = 6$, $b = 18$ (буквой a мы обозначаем полуось гиперболы, расположенную на оси абсцисс);
- 2) расстояние между фокусами $2c = 10$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

3) уравнения асимптот $y = \pm \frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48;

4) расстояние между директрисами равно $\frac{50}{7}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{5}$;

5) уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами $\frac{32}{5}$.

94. Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$; 3) $x^2 - 4y^2 = 16$; 4) $x^2 - y^2 = 1$; 5) $4x^2 - 9y^2 = 25$;

6) $25x^2 - 16y^2 = 1$; 7) $9x^2 - 64y^2 = 1$.

95. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: 1) полуоси a и b ; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.

96. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ и прямой $9x + 2y - 24 = 0$.

97. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:

1) точки $M_1(6; -1)$ и $M_2(-8; 2\sqrt{2})$ гиперболы;

2) точка $M_1(-5; 3)$ гиперболы и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;

3) точка $M_1(9/2; -1)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$;

4) точка $M_1(-3; \frac{5}{2})$ гиперболы и уравнения директрис $x = \pm \frac{4}{3}$;

5) уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ и уравнения директрис $x = \pm \frac{16}{5}$.

98. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $\xi = 2$.

99. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, и найти координаты ее центра C , полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис:

1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

2) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;

3) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

100. Составить уравнение гиперболы, зная, что:

1) расстояние между его вершинами равно 24 и фокусы суть $F_1(-10;2)$, $F_2(16;2)$;

2) фокусы суть $F_1(3;4)$, $F_2(-3;-4)$ и расстояние между директрисами равно 3,6;

3) угол между асимптотами равен 90° и фокусы суть $F_1(4;-4)$, $F_2(-2;2)$.

101. Составить уравнение гиперболы, если известны его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$, фокус $F(5;0)$ и уравнение соответствующей директрисы $5x - 16 = 0$.

4.3. Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px \text{ (или } x^2 = 2py).$$

Уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$ (или $y = -\frac{p}{2}$).

Фокальный радиус произвольной точки $M(x;y)$

$$r = x + \frac{p}{2} \text{ (или } r = y + \frac{p}{2}).$$

Практические задания

102. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно

оси Ox и ее параметр $p = 3$;

2) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и ее параметр $p = 0,5$;

3) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси Oy и ее параметр $p = \frac{1}{4}$;

4) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси Oy и ее параметр $p = 3$.

103. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол:

1) $y^2 = 6x$; 2) $x^2 = 5y$; 3) $y^2 = -4x$; 4) $x^2 = -y$.

104. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $A(9;6)$;

2) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $B(-1;3)$;

3) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $C(1;1)$;

4) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $D(4;-8)$.

105. Найти фокус точки F и уравнение директрисы параболы $y^2 = 24x$.

106. Вычислить фокальный радиус точки M и уравнение директрисы параболы $y^2 = 20x$, если абсцисса точки M равна 7.

107. Вычислить фокальный радиус M и уравнение директрисы параболы $y^2 =$

12х, если ордината точки M равна 6.

108. Составить уравнение параболы, если дан фокус $F(-7;0)$ и уравнение директрисы $x - 7 = 0$.

109. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины A и величину параметра p :

1) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$; 2) $y = 4x^2 - 8x + 7$; 3) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$.

110. Составить уравнение параболы, если:

1) даны ее фокус $F(7;2)$ и директриса $x - 5 = 0$;

2) даны ее фокус $F(4;3)$ и директриса $y + 1 = 0$.

111. Определить точки пересечения:

1) прямой $x + y - 3 = 0$ и параболы $x^2 = 4y$;

2) прямой $3x + 4y - 12 = 0$ и параболы $x^2 = -9y$.

Аналитическая геометрия в пространстве

§5. Метод координат в пространстве. Векторное и смешанное произведения векторов

5.1. Базисом трехмерного евклидова пространства E_3 называется

упорядоченная совокупность трех некопланарных векторов

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = B.$$

Аффинным репером в E_3 называется совокупность точки O (начало репера) и базиса $B = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, т.е. $R = \{O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$. Остальные понятия определяются аналогично E_2 .

5.2. Векторным произведением $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется вектор $[\vec{a} \vec{b}]$,

удовлетворяющий следующим условиям:

$$1) |[\bar{a} \bar{b}]| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \varphi, \text{ где } \varphi = (\bar{a}, \bar{b})$$

$$2) [\bar{a} \bar{b}] \perp \bar{a}; [\bar{a} \bar{b}] \perp \bar{b}$$

3) векторы $\bar{a}, \bar{b}, [\bar{a} \bar{b}]$ образуют правую тройку.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

$$1^\circ [\bar{a} \bar{b}] = -[\bar{b} \bar{a}]$$

$$2^\circ [\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a} \bar{c}] + [\bar{b} \bar{c}], [\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a} \bar{b}] + [\bar{a} \bar{c}]$$

$$3^\circ [\alpha \bar{a} \bar{b}] = \alpha [\bar{a} \bar{b}], [\bar{a} \alpha \bar{b}] = \alpha [\bar{a} \bar{b}]$$

$$4^\circ |[\bar{a} \bar{b}]| = S, \text{ где } S - \text{площадь параллелограмма построенного на векторах } \bar{a}, \bar{b}$$

.

Если в $R = \{0; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k}\}$, $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, то $[\bar{a} \bar{b}]$

$$] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

5.3. Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называется *число*, равное векторному произведению $[\bar{a} \bar{b}]$, умноженному скалярно на вектор $\bar{c}$, т. е $[\bar{a} \bar{b}] \bar{c} = \bar{a} \bar{b} \bar{c}$.

Модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного на $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, т.е

$$V_{\text{пар-пип}} = |\bar{a} \bar{b} \bar{c}|$$

Если $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарны, то

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = 0.$$

$$\text{Если } \bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}, \bar{c} = \{x_3; y_3; z_3\}, \text{ то } (\bar{a} \bar{b} \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Практические задания

112. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(1;-3;-2), B(8;0;-4), C(4;8;-3), D(-3;5;-1)$. Показать, что $ABCD$ – параллелограмм.
113. Даны три вершины параллелограмма $A(2;5;4), B(0;1;0), C(4;1;3)$. Найти координаты четвертой вершины D .
114. Доказать, что треугольник с вершинами в точках $A(3;5;-4), B(-1;1;2), C(-5;-5;-2)$ является равнобедренным.
115. Доказать, что четырехугольник, вершины которого находятся в точках $A(7;2;4), B(4;-4;2), C(6;-7;8), D(9;-1;10)$ является квадратом.
116. Даны вершины треугольника $A(2;-1;4), B(3;2;-6), C(-5;0;2)$. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A .
117. Определить радиус сферы, проходящей через точку $(-2;0;2)$ и имеющей центр в точке $(1;1;6)$.
118. На прямой, проходящей через точки $A(1;0;4)$ и $B(3;-1;2)$, найти такую C , чтобы $AC = 3AB$ и точка B лежала между точками A и C .
119. Найти отношение, в котором каждая из координатных плоскостей делит отрезок AB : $A(2;-1;7)$ и $B(4;5;-2)$.
120. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a} = \{2;-1;3\}$ и $\vec{b} = \{-6;3;-9\}$. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

121. Определить при каких значениях α, β векторы $\vec{a} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны.

122. Проверить что четыре точки $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$, $D(3;-5;3)$ служат вершинами трапеции.

123. Найти орт вектора $\vec{a} = \{6;-2;-3\}$.

124. Найти орт вектора $\vec{a} = \{3;4;-12\}$.

125. Векторы $\vec{AB} = \{2;-3;6\}$ и $\vec{AC} = \{4;2;-2\}$ совпадают со сторонами треугольника ABC . Определить координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающего с его медианами AM , BN , CP .

126. Даны векторы $\vec{a} = \{4;-2;-4\}$, $\vec{b} = \{6;-3;2\}$. Вычислить: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\sqrt{a^2}$; 3) $\sqrt{b^2}$; 4) $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; 5) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

127. Даны точки $A(-1;3;-7)$, $B(2;-1;5)$ и $C(0;1;-5)$. Вычислить: 1) $(2\vec{AB} - \vec{CB})(2\vec{BC} + \vec{BA})$; 2) $\sqrt{AB^2}$; 3) $\sqrt{AC^2}$; 4) найти координаты векторов $(\vec{AB} \cdot \vec{AC})\vec{BC}$ и $\vec{AB}(\vec{AC} \cdot \vec{BC})$.

128. Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ и $D(-5;-5;3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

129. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

130. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a} = \{2;-4;4\}$ и

$$\bar{b} = \{-3; 2; 6\}.$$

131. Вычислив внутренние углы треугольника с вершинами $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$, убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

132. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 5$, вычислить $||\bar{a} \bar{b}||$.

133. Даны: $|\bar{a}| = 10$, $|\bar{b}| = 2$ и $\bar{a} \bar{b} = 12$. Вычислить $||\bar{a} \bar{b}||$.

134. Даны: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 26$ и $||\bar{a} \bar{b}|| = 72$. Вычислить $\bar{a} \bar{b}$.

135. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, вычислить: 1) $||(\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} - \bar{b})||$; 2) $||(\bar{a} - 2\bar{b})(3\bar{a} - \bar{b})||$.

136. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, вычислить: 1) $||\bar{a} \bar{b}||^2$; 2) $||(\bar{a} + 2\bar{b})(2\bar{a} + \bar{b})||^2$; 3) $||(\bar{a} + 3\bar{b})(3\bar{a} - \bar{b})||^2$.

137. Даны векторы $\bar{a} = \{3; -1; -2\}$ и $\bar{b} = \{1; 2; -1\}$. Найти координаты векторных произведений: 1) $[\bar{a} \bar{b}]$; 2) $[(2\bar{a} + \bar{b})\bar{b}]$; 3) $[(2\bar{a} - \bar{b})(2\bar{a} + \bar{b})]$.

138. Даны точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$ и $C(3; 2; 1)$. Найти координаты векторных произведений: 1) $[\overrightarrow{AB} \overrightarrow{BC}]$; 2) $[(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA})\overrightarrow{CB}]$.

139. Сила $\vec{f} = \{3; 2; -4\}$ приложена к точке $A(2; -1; 1)$. Определить момент этой силы относительно начала координат (т.е. $\vec{m} = [\vec{a} \vec{f}]$).

140. Сила $\vec{P} = \{2; -4; 5\}$ приложена к точке $M_0(4; -2; 3)$. Определить момент

этой силы относительно точки $A(3;2;-1)$.

141. Даны точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ и $C(5;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC .

142. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ и $C(1;3;-1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .

143. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = \{2;-2;1\}$ и $\vec{b} = \{2;3;6\}$.

144. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 2$; $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

145. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30° . Зная, что $|\vec{a}| = 6$; $|\vec{b}| = 3$; $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

146. Даны векторы $\vec{a} = \{1;-1;3\}$, $\vec{b} = \{-2;2;1\}$, $\vec{c} = \{3;-2;5\}$. Вычислить $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

147. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ если:

1) $\vec{a} = \{2;3;-1\}$, $\vec{b} = \{1;-1;3\}$, $\vec{c} = \{1;9;11\}$;

2) $\vec{a} = \{3;-2;1\}$, $\vec{b} = \{2;1;2\}$, $\vec{c} = \{3;-1;-2\}$;

3) $\vec{a} = \{2;-1;2\}$, $\vec{b} = \{1;2;-3\}$, $\vec{c} = \{3;-4;7\}$.

148. Доказать, что точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

149. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ и $D(4;1;3)$.

150. Даны вершины тетраэдра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D .

151. Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Найти координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси Oy .

§6. Плоскость

6.1. Различные способы задания плоскости

Уравнение плоскости:

1) проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно двум векторам $\vec{a} \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\vec{b} \{b_1, b_2, b_3\}$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ в } R \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

2) проходящей через три неколлинеарные точки $M_0(x_1, y_1, z_1)$, $M_0(x_2, y_2, z_2)$, $M_0(x_3, y_3, z_3)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ в } R \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

3) проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n} \{A, B, C\}$, имеет вид

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \text{ в } R \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

или общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

4) «в отрезках»

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

6.2. Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть в $R \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ даны две плоскости

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \text{ тогда:}$$

а) $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, тогда и только тогда, когда $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$

$$= \lambda C_2, D_1 \neq \lambda D_2,$$

$$\text{б) } \pi_1 = \pi_2, \text{ тогда и только тогда, когда } A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, C_1 = \lambda C_2, D_1 = \lambda D_2,$$

$$\text{в) } \pi_1 \cap \pi_2, \text{ тогда и только тогда, когда } A_1 \neq \lambda A_2, B_1 \neq \lambda B_2, C_1 \neq \lambda C_2.$$

6.3. Метрические задачи

1) В ортонормированном репере $R \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле:

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

2) угол между плоскостями π_1 и π_2

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Практические задания

152. Найти уравнение плоскости:

1) проходящей через точку $A(2, 0, 3)$ и параллельной векторам $\bar{p}_1 \{1, 0, 1\}$ и $\bar{p}_2 \{2, 1, 3\}$;

2) проходящей через точку $A(0, 0, 1)$ и параллельной векторам $\bar{p}_1 \{2, 1, 5\}$ и $\bar{p}_2 \{1, 0, 1\}$.

153. Найти уравнение плоскости:

1) проходящей через точку $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(2, -1, 3)$ и параллельной вектору $\bar{p}_1 \{1, 2, 2\}$;

2) проходящей через точку $M_1(-1, 0, 0)$, $M_2(0, 0, 1)$ и параллельной вектору $\bar{p}_1 \{2, 2, 1\}$;

3) проходящей через ось Ox и точку $A(1, 1, 1)$.

154. Найти уравнение плоскости:

1) проходящей через точки $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(2, 1, 3)$ и $M_3(0, -1, 2)$;

2) проходящей через точки $M_1(0, 0, 9)$, $M_2(1, 2, 3)$ и $M_3(0, 3, 6)$

155. Написать уравнение плоскостей:

1) проходящих через точку $M_0(1, 2, -1)$ и параллельных каждой из координатных плоскостей;

2) проходящих через две точки $M_1(1, 2, -4)$ и $M_2(2, 0, -3)$ и параллельных каждой из координатных осей;

3) проходящих через точку $M(2, 1, -5)$ и через каждую из координатных осей.

156. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(3, 2, 4)$ и отсекает на осях отличные от нуля отрезки одинаковой длины.

157. Написать уравнение плоскости:

1) проходящей через точку и перпендикулярной вектору $\vec{n} \{1, 2, -4\}$;

2) проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{n} \{1, 2, -4\}$.

158. Дан тетраэдр: $A(-1, 2, 5)$, $B(0, -4, 5)$, $C(-3, 2, 1)$ и $D(1, 2, 4)$. Написать уравнение трёх плоскостей, проходящих через вершину D и перпендикулярных соответственно сторонам AB , BC и CA .

159. Найти множество точек, равноудаленных от точек $A(2, -1, 3)$ и $B(4, 5, -3)$.

160. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, -1, 3)$, $B(1, 2, 4)$ и перпендикулярной плоскости $2x - 3y + z + 1 = 0$.

161. Установить взаимное расположение следующих пар плоскостей:

1) $x - 3y + z + 1 = 0$, $2x + y - 4z + 2 = 0$;

2) $3x + y - z + 2 = 0$, $6x + 2y - 2z + 3 = 0$;

3) $\sqrt{2}x - y + 3z + \sqrt{2} = 0$, $2x - \sqrt{2}y + 3\sqrt{2}z + 2 = 0$;

4) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z = 0$.

162. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и параллельной плоскости:

1) $2x - 4y + 5z - 3 = 0$;

2) $2y - 7z + 6 = 0$;

3) $3x + 5 = 0$.

163. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -3, 5)$ и параллельной плоскости:

1) $3x - y + z + 4 = 0$;

2) $x - 3y + 7 = 0$;

3) $3z - 4 = 0$.

164. Вычислить расстояние от начала координат до плоскости:

1) $15x - 10y + 6z - 190 = 0$;

2) $2x - 3y + 5z - 3 = 0$.

165. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 0, 1)$ и $M_2(1, 1, 2)$ и отстоящей от начала координат на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

166. Найти расстояние от точек до плоскости в каждом из следующих

случаев:

- 1) $M_1(1, -2, 2), 2x + y + 2z - 7 = 0;$
- 2) $M_2(3, 2, 4), 2x + 3y + 8 = 0;$
- 3) $M_3(-1, 2, \sqrt{2}), 5x - 3y + \sqrt{2}z = 0.$

167. Вычислить расстояние между следующими параллельными плоскостями: $x - 3y + 2z + 1 = 0, 2x - 6y + 4z + 3 = 0.$

168. Вычислить расстояние между следующими парами параллельных плоскостей:

- 1) $x - 2y + 2z - 6 = 0, x - 2y + 2x + 18 = 0;$
- 2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0, 4x - 6y + 12z - 21 = 0;$
- 3) $x - y + 5z + 27 = 0, x - y + 5z - 54 = 0;$
- 4) $x - y + 5z + 27 = 0, x - y + 5z + 1 = 0.$

169. На оси Oz найти точку, равноудалённую от точки $M(1, 1, 4)$ и от плоскости $2x - 2y + z - 12 = 0.$

§7. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей

7.1. Уравнение прямой, заданной

1) точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{a} \{a_1, a_2, a_3\}$ имеет

канонический вид:
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

или параметрический вид:
$$d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (1)$$

2) двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

3) Как линия пересечения двух плоскостей (общие уравнения) имеет вид:

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \end{cases}$$

7.2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Если прямая $d_1: M_1(x_1, y_1, z_1), \vec{a} \{a_1, a_2, a_3\}$ и $d_2: M_2(x_2, y_2, z_2), \vec{b} \{b_1, b_2, b_3\}$, то

1) d_1 и d_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда $(M_1M_2, \vec{a}, \vec{b}) \neq 0.$

2) d_1 и d_2 лежат в одной плоскости, если $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) = 0.$

При этом а) они пересекаются, если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

б) прямые $d_1 \parallel d_2$, если $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$

в) прямые $d_1 = d_2$, если $\vec{a} \nparallel \vec{b} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$

Угол между двумя прямыми вычисляется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

III. Взаимное расположение прямой d и плоскости

Чтобы найти точки пересечения прямой d (1) и плоскости $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ (2), надо решить совместно эти уравнения и определить параметр t из

уравнения $\alpha t + \beta = 0$, где $\alpha = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3$, $\beta = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$

1) если $\alpha \neq 0$, то прямая и плоскость пересекаются,

2) если $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, то прямая d параллельна плоскости,

3) если $\alpha = 0$, $\beta = 0$, то прямая лежит в плоскости.

Угол между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|Aa_1 + Bb_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Практические задания

170. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2; 0; -3)$ параллельно

1) $\vec{a} = (2; 0; -3)$; 2) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$; 3) оси Ox; 4) оси Oy; 5) оси Oz.

171. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через данные точки

1) $(1; -2; 1)$, $(3; -1; 1)$; 2) $(3; -1; 0)$, $(1; 0; -3)$;

3) $(0; -2; 3)$, $(3, -2, 1)$; 4) $(1; 2; -4)$, $(-1; 2; -4)$.

172. Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(1; -1; 3)$ параллельно

1) $\vec{a} = \{2; -3; 4\}$;

2) прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{0}$;

3) прямой $x = 3t - 1, y = -2t + 3, z = 5t + 2$.

173. Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через данные точки:

1) $(3; -1; 2), (3; 1; -1)$; 2) $(3; -1; 0), (1; 0; -3)$;

3) $(0, -2, 3), (3; -2; 1)$; 4) $(1; 2; -4), (-1; 2; -4)$.

174. Через точки $M_1(-6; 6; 5)$ и $M_2(12; -6; 1)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

175. Даны вершины треугольника $A(3; 6; -7), B(-5; 2; 3)$ и $C(4; -7; -2)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины C .

176. Даны вершины треугольника $A(3; -1; -1), B(1; 2; -7)$ и $C(-5; 14; -3)$. Составить каноническое уравнение биссектрисы его внутреннего угла при вершине B .

177. Даны вершины треугольника $A(2; -1; -3), B(5; 2; -7)$ и $C(-7; 11; 6)$. Составить каноническое уравнение биссектрисы его внутреннего угла при вершине A .

178. Составить каноническое уравнение прямой, которая проходит через точку $M_1(-4; -5; 3)$ и пересекает две прямые $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$,

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{-5}.$$

179. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $3x - y + 3z = 0, x + 3y - 2z + 3 = 0$.

180. Составить канонические уравнения следующих прямых:

1) $x - 2y + 3z - 4 = 0, 3x + 2y - 5z - 4 = 0,$

2) $5x + y + z = 0, 2x + 3y - 2z + 5 = 0,$

3) $x - 2y + 3z + 1 = 0, 2x + y - 4z - 8 = 0.$

181. Найти острый угол между прямыми $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$

182. Определить косинус угла между прямыми $x - y - 4z - 5 = 0,$

$2x + y - 2z - 4 = 0$ и $x - 6y - 6z + 2 = 0, 2x + 2y + 9z - 1 = 0.$

183. Доказать, что прямые, заданные параметрическими уравнениями $x = 2t - 3, y = 3t - 2, z = -4t + 6$ и $x = t + 5, y = -4t - 1, z = t - 4,$ пересекаются.

184. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{5}.$

185. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(-4; -5; 3)$ и пересекает две прямые $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}; \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}.$

186. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-6}, 2x + 3y + z - 1 = 0,$

2) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}, x - 2y + z - 15 = 0,$

3) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}, x + 2y - 2z + 6 = 0.$

187. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3; -5)$

перпендикулярно к плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

188. Составить уравнение плоскости проходящей через точку $M_0(1;-1;1)$

перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$.

189. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;-2;1)$

перпендикулярно к прямой $x - 2y + z - 3 = 0$, $x + y - z + 2 = 0$.

190. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости

$x - 3y + 6z + 7 = 0$.

191. При каких значениях A и D прямая $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$ лежит в плоскости $Ax + 2y - 4z + D = 0$?

192. Вычислить расстояние d точки $P(2; 3; -1)$ от прямой $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

193. Вычислить расстояние d от точки $P(2; 3; -1)$ до следующих прямых:

1) $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$,

2) $x = t + 1$, $y = t + 2$, $z = 4t + 13$,

3) $2x - 2y + z + 3 = 0$, $3x - 2y + 2z + 17 = 0$.

194. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 2t + 1$, $y = -3t + 2$, $z = 2t - 3$ и точку $M_1(2; -2; 1)$.

195. Доказать что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$, и $x = 3t + 7$, $y = 2t + 2$,

$z = -2t + 1$ лежат в одной плоскости и составить уравнение этой плоскости.

196. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$.

197. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x + 2y - z - 5 = 0$.

§8. Поверхности второго порядка

Действительные поверхности второго порядка задаются следующими каноническими уравнениями:

1) эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,

2) однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$,

3) двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$,

4) эллиптический параболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$,

5) гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$,

6) коническая поверхность: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$,

7) эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

8) гиперболический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

9) пара пересекающихся плоскостей: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$,

10) пара параллельных плоскостей: $x^2 = a^2$,

11) параболический цилиндр: $x^2 = 2py$.

Практические задания

198. Составить уравнение поверхности, образованной вращением параболы $z^2 = 10y$, $x = 0$ вокруг оси Oz .

199. Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy каждой из следующих кривых, расположенных на плоскости Oxy :

- 1) эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$;
4) параболы $x^2 = 2py$.

200. Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности, если известно уравнение ее оси $x = 7+3t, y = 1+4t, z = 3+2t$ и координаты одной из ее точек $M_1(1, -1, 0)$.

201. Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности, если известно уравнение ее оси $x = t, y = 1+2t, z = -3-2t$ и координаты одной из ее точек $M_0(1, -2, 1)$.

202. Составить уравнение цилиндрической поверхности в каждом из следующих случаев:

- 1) направляющая лежит в плоскости Oxy и имеет уравнение $x^2 + 2xy + 3y^2 - x = 0$, а образующие параллельны вектору $\{1, 0, 1\}$;
- 2) направляющая лежит в плоскости Oyz и имеет уравнение $y^2 - yz + 5 = 0$, а образующие параллельны оси Ox ;
- 3) направляющая лежит в плоскости Oxy и имеет уравнение $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$, а образующие параллельны вектору $\{1, 2, -1\}$;
- 4) направляющая лежит в плоскости Oxz и является окружностью $(x-1)^2 + z^2 = 4$, а образующие параллельны оси Oy .

203. Написать уравнение цилиндрической поверхности вращения, если ось вращения совпадает с осью Oz , а радиус $r = 5$.

204. Написать уравнение конической поверхности, если:

- 1) направляющая в плоскости Oxy задана уравнением $x^2 + y^2 - y = 0$, а вершина имеет координаты $(1, 0, 1)$;
- 2) направляющая в плоскости Oxy задана уравнением $x^2 + y^2 = 16$, а вершина имеет координаты $(0, 0, 1)$.

205. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке $S(1, 2, 4)$, образующие которой составляют с плоскостью $2x + 2y + z = 0$ угол $\varphi = 45^\circ$.

206. Исследовать методом сечений следующие поверхности второго порядка, заданные в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями:

- 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$; 2) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4x - 8 = 0$;
- 3) $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$; 4) $x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 5 = 0$.

207. Найти сечение эллипсоида $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ координатными плоскостями канонической системы координат.

208. Написать уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат и который:

1) проходит через точку $M(2, 0, 1)$ и пересекает плоскость Oxy по эллипсу

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1;$$

2) проходит через точку $N(1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ и пересекает плоскость Oyz по эллипсу

$$\frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{20} = 1;$$

3) пересекает плоскость Oyz по эллипсу $\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{2} = 1$, а плоскость Oxy по окружности $x^2 + y^2 = 25$.

209. Исследовать методом сечений следующие поверхности второго порядка, заданные в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями:

1) $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1;$

2) $2x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 8x + 6y - 12z - 21 = 0;$

3) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 8z - 8 = 0.$

210. Определить сечение однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - z^2 = 1$ с

плоскостью, проведённой через точку $(0, 0, 1)$ параллельно плоскости Oxy .

211. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если поверхность:

1) проходит через точку $(\sqrt{5}, 3, 2)$ и пересекает плоскость Oxz по гиперболе

$$\frac{x^2}{5} - \frac{z^2}{4} = 1;$$

2) пересекает плоскость Oxy по окружности $x^2 + y^2 = 9$, а плоскость Oxz по гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{10} = 1.$

212. Написать уравнение двуполостного гиперболоида в канонической системе координат, если точки $M_1(3, 1, 2)$, $M_2(2, \sqrt{11}, 3)$ и $M_3(6, 2, \sqrt{15})$ лежат на данной поверхности.

213. Найти множество точек, для каждой из которых модуль разности расстояния от двух данных точек $(0, 0, 3)$, $(0, 0, -3)$ есть величина постоянная, равная 4.

214. Исследовать методом сечений следующие поверхности второго порядка, заданные в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями:

1) $4x^2 + y^2 - 16z = 0$; 2) $2x^2 + 2y^2 - 4z + 5 = 0$; 3) $x^2 - 2y^2 - 4x - z + 1 = 0$.

215. Найти уравнение параболоида с центром в начале координат, ось которого совпадает с осью Oz и который проходит через точки $(1, -2, 1)$ и $(-3, -3, 2)$.

Многомерная и дифференциальная геометрия

§9. Аффинные n – мерные пространства

216. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если

$$\begin{aligned} 1) \vec{x} &= 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3, & 2) \vec{x} &= 4\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 6\vec{a}_3, \\ \vec{a}_1 &= (1; -2; 3), & \vec{a}_1 &= (1; 3; -1, 2, 5), \\ \vec{a}_2 &= (2; -2; 1), & \vec{a}_2 &= (2; 0; -3, 4, 2), \\ \vec{a}_3 &= (-1; -1; -1); & \vec{a}_3 &= (-1; -3; 1, 2, 1). \end{aligned}$$

217. Доказать, что следующие системы векторов образуют базис четырехмерного векторного пространства V_4 :

$$\begin{aligned} 1) \vec{u}_1 &= (1, 1, 1, 0), & 2) \vec{u}_1 &= (2, 3, 4, -3), \\ \vec{u}_2 &= (1, 2, 1, 1), & \vec{u}_2 &= (5, 4, 9, -2), \\ \vec{u}_3 &= (1, 1, 2, 1), & \vec{u}_3 &= (1, 0, 0, 0), \\ \vec{u}_4 &= (1, 3, 2, 5), & \vec{u}_4 &= (3, 5, 5, 3), \end{aligned}$$

Решение. 1) Для решения задачи достаточно проверить, что определитель матрицы, составленной из координат данных векторов, отличен от нуля.

Вычислим этот определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Поскольку определитель отличен от нуля, система векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ является линейно независимой системой, состоящей из четырех векторов, и поэтому образует базис пространства V_4 .

218. Векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{x}$ заданы своими координатами относительно некоторого базиса. Проверить, что векторы $\vec{u}_1 = (2; 1; 2; 1)$, $\vec{u}_2 = (3; 1; 1; 1)$, $\vec{u}_3 = (11; 5; 3; 3)$, $\vec{u}_4 = (5; 2; 2; 4)$ образуют базис пространства V_4 , и найти

относительно этого базиса координаты вектора $\vec{x}$:

1) $\vec{x} = (2, 1, -3, -3),$

2) $\vec{x} = (1, 2, 0, -1),$

Указание. а) Чтобы найти координаты вектора $\vec{x} = (2; 1; -3; -3)$ относительно базиса $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ нужно представить вектор $\vec{x}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$: $\vec{x} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3 + x_4 \vec{u}_4$ и решить систему:

$$\begin{cases} 2 = 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4, \\ 1 = x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4, \\ -3 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4, \\ -3 = x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4. \end{cases}$$

219. Пусть $R(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$ аффинный репер в пятимерном аффинном пространстве A_5 . Найти координаты точек $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, M, N, L, K$, если $\vec{OE}_1 = \vec{e}_1, \vec{OE}_2 = \vec{e}_2, \vec{OE}_3 = \vec{e}_3, \vec{OE}_4 = \vec{e}_4, \vec{OE}_5 = \vec{e}_5,$
 $\vec{OE} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 + \vec{e}_5, \vec{OM} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - 3\vec{e}_5,$
 $\vec{ON} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - \vec{e}_5, \vec{OL} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 - \vec{e}_4 + 4\vec{e}_5, \vec{OK} = -\vec{e}_3 - 6\vec{e}_5.$

Решение. Координаты произвольной точки M аффинного пространства A_n совпадают с координатами ее радиус – вектора $\vec{OM}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \dots, \vec{e}_n$ n – мерного векторного пространства V_n , связанного с пространством A_n . Поэтому точка M , для которой $\vec{OM} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - 3\vec{e}_5$, $(0, 1, -1, 2, -3)$. Аналогично находятся координаты остальных точек.

220. Даны точки $M(2, -2, -5, 2, 3)$ и $N(6, 6, 0, -30, -12)$ аффинного пространства A_5 . Найти координаты точек P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , которые делят отрезок MN в отношении: $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=\frac{1}{3}, \lambda_4=-3, \lambda=-\frac{1}{2}.$

Решение. Известно, что координаты точки P , делящей отрезок MN в отношении $\lambda \neq -1$ в n – мерном пространстве, находятся по формуле: $z_i = \frac{x_i + \lambda y_i}{1 + \lambda}$, где x_i – координаты точки M , y_i – координаты точки N , z_i –

координаты точки $P, i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому точка P_1 имеет координаты:

$$z_1 = \frac{2+6}{2}=4, \quad z_2 = \frac{-2+6}{2}=2, \quad z_3 = \frac{-5+0}{2}=-2\frac{1}{2}, \quad z_4 = \frac{2-30}{2}=-14, \quad z_5 = \frac{3-12}{2}=-4\frac{1}{2}.$$

Отметим, что точка P_1 является серединой отрезка MN . Точка P_2 имеет

$$\text{следующие координаты: } z_1 = \frac{2+2 \cdot 6}{3}=4\frac{2}{3}=z_4, \quad z_2 = \frac{-2+2 \cdot 6}{3}=3\frac{1}{3}, \quad z_3 = \frac{-5+2 \cdot 0}{3}=-1\frac{2}{3},$$

$$z_4 = \frac{2+2 \cdot (-30)}{3}=-19\frac{1}{3}, \quad z_5 = \frac{3+2 \cdot (-12)}{3}=-7.$$

Аналогично находятся координаты точек P_3, P_4, P_5 .

221. Найти координаты точек пересечения медиан треугольника ABC в пространстве A_5 , зная координаты его вершин $A(1,3,4,-2,1)$, $B(3,1,-6,-2,5)$, $C(5,-3,4,6,3)$.

222. Найти вершину D параллелограмма $ABCD$ в пространстве A_4 , зная координаты вершин $A(1,3,-2,1)$, $B(4,-1,6,5)$, $C(8,-5,2,6,3)$.

223. Даны точки $A(0, 3, -4, 5, -1)$, $B(1, 1, -2, -1, 5)$, $C(1, -7, 2, -9, 8)$, $D(-1, -3, -2, 3, -4)$ в A_5 . Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ является трапецией.

224. Показать, что формулы:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + 5x'_2 + x'_4 + 2, \\ x_2 = -2x'_2 - x'_3 + 3x'_4 + 6, \\ x_3 = x'_3 + x'_4, \\ x_4 = x'_1 - x'_4 + 4. \end{cases} \quad (1)$$

можно рассматривать как формулы преобразования координат точек аффинного пространства A_4 при изменении реперов. Найти:

- 1) формулы, выражающие новые координаты точек через старые;
- 2) новые координаты точек $M(1, 10, 0, 1)$, $N(-9, 10, 4, 3)$, $P(2, 9, -1, 5)$, $Q(3, 12, -2, 3)$;
- 3) точки, соответствующие координаты которых в новом и старом реперах совпадают.

Указание. Чтобы доказать, что написанные формулы являются формулами преобразования координат, следует проверить неравенство $\Delta \neq 0$, где Δ – определитель матрицы, составленной из коэффициентов при x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 .

Разрешив формулы преобразования координат (1) относительно x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 , можно найти формулы выражения новых координат через старые. Подставив в полученные формулы старые координаты точек M, N, P, Q , получим их новые координаты.

Новые координаты, например, точки $M(1, 10, 0, 1)$, можно найти, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = x'_1 + 5x'_2 + x'_4 + 2, \\ 10 = -2x'_2 - x'_3 + 3x'_4 + 6, \\ 0 = x'_3 + x'_4, \\ 1 = x'_1 - x'_4 + 4, \end{cases}$$

$$x'_1 = -2, x'_2 = 0, x'_3 = -1, x'_4 = 1.$$

Точки, старые и новые координаты которых совпадают, являются решениями следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + 5x_2 + x_4 + 2, \\ x_2 = -2x_2 - x_3 + 3x_4 + 6, \\ x_3 = x_3 + x_4, \\ x_4 = x_1 - x_4 + 4. \end{cases}$$

225. Показать, что формулы

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + 3x'_2 - x'_4 + 2x'_5 + 5, \\ x_2 = x'_1 + x'_3 + 4x'_4 + 2x'_5 + 1, \\ x_3 = 3x'_1 - 2x'_2 + 5x'_3 - x'_5 - 2, \\ x_4 = x'_1 + x'_2 - 6x'_3 + x'_4 + 3, \\ x_5 = 3x'_1 + x'_3 - 7x'_4 - 2x'_5 - 7 \end{cases}$$

являются формулами преобразования координат точек аффинного пространства A_5 при изменении репера. Найти:

- 1) новые координаты точек $M(1, 3, -2, 1, 2)$, $N(2, 1, 1, 0, 0)$, $P(3, 2, 0, -1, -2)$, $Q(0, 2, 0, -3, 1)$;
- 2) точки, соответствующие координаты которых в новом и старом реперах совпадают;
- 3) формулы, выражающие новые координаты точек через их старые.

226. Написать формулы преобразования координат точек аффинного пространства A_4 , если известны старые координаты нового начала $O'(2, 1, 5, 4)$ и старые координаты новых базисных векторов $\vec{e}'_1 = (1, 2, 4, -1)$, $\vec{e}'_2 = (1, 1, 2, 3)$, $\vec{e}'_3 = (0, 0, 2, 2)$, $\vec{e}'_4 = (-3, -5, 0, 0)$.

Указание. Искомые формулы имеют следующий вид

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \dots + a_{1n}x'_n + x_1^\circ, \\ x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \dots + a_{2n}x'_n + x_2^\circ, \\ &\dots, \\ x_n &= a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \dots + a_{nn}x'_n + x_n^\circ, \end{aligned}$$

где $A=(a_{ij})$ – транспонированная матрица перехода от старого базиса к новому, $x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ$ – координаты произвольной точки в старом и новом реперах.

227. Написать формулы преобразования координат точек аффинного пространства A_5 , если:

- 1) базисные векторы остаются прежними, а началом нового репера является точка $O'(4, 3, -1, 1, 5)$;
- 2) начало нового репера остаётся прежним, а новый базис образуют векторы $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{e}'_3 = 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 + 5\vec{e}_5$, $\vec{e}'_4 = 2\vec{e}_4$, $\vec{e}'_5 = 7\vec{e}_5$;
- 3) новым началом является точка $O'(-1, -2, -3, 0, 4)$ и новыми базисными векторами являются векторы $\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1$, $\vec{e}'_2 = 5\vec{e}_2$, $\vec{e}'_3 = 4\vec{e}_3$, $\vec{e}'_4 = -2\vec{e}_4$, $\vec{e}'_5 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 + \vec{e}_5$.

§10. Евклидовы n – мерные пространства

228. В евклидовом пространстве V_4 заданы векторы $\vec{u} = (3; 0; 1; 0)$, $\vec{v} = (3; 2; 1;$

1), $\vec{w} = (4; -2; -1; 1)$. Найти следующие скалярные произведения:

1) $\vec{u}^2, \vec{u} \cdot \vec{v}, \vec{u} \cdot \vec{w}, \vec{v} \cdot \vec{w}$;

2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}), (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{v}$;

3) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}), (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})^2$.

229. В евклидовом пространстве E_5 известны вершины $A(4; 3; 3; 4; 5)$, $B(-2; -2; 2; 5; 4)$, $C(-1; 2; 2; 1; 5)$ треугольника ABC . Найти длины сторон, медиан и величины углов этого треугольника.

230. В евклидовом пространстве E_4 известны координаты вершин $A(4; 3; 2; -1)$, $B(4; -1; 5; -1)$, $C(5; 6; 6; 1)$ треугольника ABC . Доказать, что треугольник ABC прямоугольный.

231. В евклидовом пространстве E_5 известны координаты вершин $A(1; 4; 2; -1; 3)$, $B(1; 2; -2; 3; 3)$, $C(-2; -1; 1; -2; 3)$ треугольника ABC . Доказать, что треугольник равнобедренный.

232. В евклидовом пространстве E_4 известны координаты вершин треугольника $A(1; -3; 2; 1)$, $B(2; -4; 7; 4)$, $C(2; -3; 0; 3)$.

Найти длину биссектрисы AD .

Указание. В любом евклидовом пространстве справедливы теоремы планиметрии. Поэтому для решения задачи надо найти координаты точки D , делящей отрезок BC в отношении $\lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

233. В евклидовом пространстве E_5 известны координаты вершин $A(3; 5; -1; 2; 4)$, $B(-2; 0; 2; 4; 3)$, $C(2; 2; -2; 1; 4)$ треугольника ABC . Найти длины биссектрисы и медианы, проходящих через точку A .

Указание. Воспользуйтесь указанием к задаче 232.

234. Доказать, что точки $A(4; 3; 2; -1; 3)$, $B(4; -1; 5; -1; 3)$, $C(5; 6; 6; 1; 3)$, $D(5; 10; 3; 1; 3)$ евклидова пространства E_5 являются вершинами прямоугольника $ABCD$.

Указание. Для доказательства следует проверить, что вектор $\overline{AB} = \overline{DC}$ и $\overline{AB}$ ортогонален $\overline{AD}$.

Во всех задачах этого параграфа рассматриваются только ортонормированные реперы евклидовых пространств.

235. Выяснить, какие из следующих матриц являются ортогональными:

$$\begin{aligned}
& 1) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\
& 4) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad 5) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Указание. Напомним, что матрица A называется ортогональной, если $A^{-1} = A^T$, что равносильно равенству $A \cdot A^T = E$.

236. Выяснить, какие из следующих формул задают движение евклидова пространства E_3 :

$$\begin{aligned}
& 1) \begin{cases} x'_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{2}, \\ x'_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + 3, \\ x'_3 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x'_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 - 2, \\ x'_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 + 6, \\ x'_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - 1; \end{cases} \\
& 3) \begin{cases} x'_1 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x_3 - 1, \\ x'_2 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3 + 2, \\ x'_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 3; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x'_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}x_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}x_3 - 1, \\ x'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 + 3, \\ x'_3 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

237. Выяснить, какие из следующих формул задают движения евклидова пространства E_4 :

$$\begin{aligned}
& 1) \begin{cases} x'_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 5, \\ x'_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 4, \\ x'_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 3, \\ x'_4 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x'_1 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + 6, \\ x'_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 1, \\ x'_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - 4, \\ x'_4 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 1; \end{cases}
\end{aligned}$$

$$3) \begin{cases} x'_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 4, \\ x'_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 3, \\ x'_3 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 2, \\ x'_4 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

238. Написать формулы движения пространства E_3 , если известны формулы ассоциированного ортогонального преобразования векторного пространства V_3 :

$$\begin{cases} u'_1 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 + \frac{\sqrt{6}}{4}u_3, \\ u'_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2 - \frac{\sqrt{6}}{4}u_3, \\ u'_3 = \frac{\sqrt{6}}{4}u_1 - \frac{\sqrt{6}}{4}u_2 + \frac{1}{2}u_3. \end{cases}$$

и если: 1) начало репера отображается на точку $O' (-1; 3; 4)$;

2) точка $M (3; -2; 1)$ отображается на точку $M' (4; 3; -2)$.

239. Написать формулы движения пространства E_4 , если: 1) известны формулы ассоциированного преобразования:

$$\begin{cases} u'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}u_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}u_2, \\ u'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}u_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}u_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}u_3, \\ u'_3 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}u_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}u_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}u_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}u_4, \\ u'_4 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4. \end{cases}$$

(начало репера остается неподвижным); 2) ассоциированное ортогональное преобразование отображает векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ на векторы $\vec{e}'_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

, $\vec{e}'_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{e}'_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{e}'_4 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. А начало координат переходит в точку $O' (1; 0; -1; 2)$.

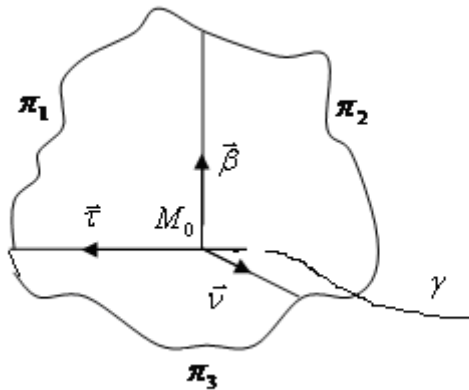
§ 11. Кривые в трехмерном евклидовом пространстве

Кривая γ в E_3 задается векторно – параметрическим уравнением

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t), \quad (1)$$

параметрическими уравнениями:

$$\gamma : x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (2)$$



π_1 - спрямляющая плоскость

π_2 - нормальная плоскость

π_3 - соприкасающаяся плоскость

Единичные векторы *касательной* $\vec{\tau}$, *главной нормали* $\vec{v}$ и *бинормали* $\vec{\beta}$ находятся по формулам:

$$\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}; \vec{v} = \frac{\left[\begin{bmatrix} \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \end{bmatrix} \right]}{\left\| \begin{bmatrix} \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \end{bmatrix} \right\|}; \vec{\beta} = \frac{\begin{bmatrix} \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \end{bmatrix} \right\|}.$$

Длина дуги линии, или *натуральный параметр* определяется формулой:

$$S = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Векторные уравнения прямых и плоскостей, образующих репер Френе, имеют соответственно вид:

1) касательной: $\vec{R} = \vec{r} + \lambda \dot{\vec{r}};$

2) главной нормали: $\vec{R} = \vec{r} + \lambda \begin{bmatrix} \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \end{bmatrix};$

3) бинормали: $\vec{R} = \vec{r} + \lambda \begin{bmatrix} \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \end{bmatrix};$

4) соприкасающейся плоскости: $(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = 0;$

5) нормальной плоскости: $(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = 0;$

6) спрямляющей плоскости: $(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\vec{r}} \\ \ddot{\vec{r}} \end{bmatrix} = 0.$

Кривизна кривой вычисляется по формуле:

$$K = \frac{\left[\begin{array}{c} \ddot{r} \ddot{r} \\ \dot{r} \dot{r} \\ r r \end{array} \right]}{\left| \begin{array}{c} \dot{r} \\ r \end{array} \right|^3},$$

кручение кривой:

$$\kappa = \frac{\left(\begin{array}{c} \ddot{r} \ddot{r} \ddot{r} \\ \dot{r} \dot{r} \dot{r} \\ r r r \end{array} \right)}{\left[\begin{array}{c} \ddot{r} \ddot{r} \\ \dot{r} \dot{r} \\ r r \end{array} \right]^2}.$$

Практические задания

240. Составьте уравнения касательных к следующим кривым в указанных точках:

- 1) $x = \sec t, y = \tan t, z = at$ при $t = \pi/4$;
- 2) $x = e^t, y = e^{-t}, z = t^2$ при $t = 1$;
- 3) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ при $t = 0$.

241. Напишите уравнения касательной прямой и нормальной плоскости линии $x^2 = 2az, y^2 = 2bz$ в произвольной точке.

242. Найдите уравнения нормальной плоскости в произвольной точке линии $x^2 + y^2 = 1, y^2 + z = 1$ ($y \neq \pm 1$).

243. Покажите, что нормальные плоскости кривой $x = a \sin^2 t, y = a \sin t \cos t, z = a \cos t$ проходят через начало координат.

244. Найдите соприкасающиеся плоскости кривой $x = t, y = t^2, z = t^3$, проходящие через данную точку $M_0(2, -1/3, -6)$.

245. Напишите уравнение соприкасающейся плоскости кривой $x = a \cos t, y = b \sin t, z = e^t$ в точке $t = 0$.

246. Составьте уравнения главной нормали и бинормали следующих кривых в указанных точках:

- 1) $x = t, y = t^2, z = e^t$ при $t = 0$;
- 2) $x = t, y = t^2, z = t^3$ при $t = 1$.

247. Найдите единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали в произвольной точке следующих кривых:

- 1) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t$;

$$2) x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a \cos (t/2).$$

248. Докажите, что векторы t, n, b кривой $x = t, y = t^2, z = t^3$ в точке $O(0, 0, 0)$ совпадают с единичными векторами координатных осей.

249. Найдите длину дуги винтовой линии $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ от точки пересечения с плоскостью xOy до произвольной точки M .

250. Найдите длину дуги линии $x^3 = 3a^2y, 2xz = a^2$, заключенной между плоскостями $y = a/3, y = 9a$.

251. Покажите, что замкнутая кривая $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t$ имеет длину $s = 10$.

252. Найдите длину дуги кривой $x = a \operatorname{ch} t, y = a \operatorname{sh} t, z = at$, заключенной между точками, соответствующими значениям параметра 0 и t .

253. Докажите, что для следующих кривых кривизна и кручение равны:

- 1) $x = a \operatorname{ch} t,$
- 2) $y = a \operatorname{sh} t, z = at.$
- 3) $x = 3t - t^3,$
- 4) $y = 3t^2, z = 3t + t^3.$

254. Найдите кривизну и кручение винтовой линии $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt.$

255. Найдите кривизну и кручение следующих кривых:

- 1) $x = a \operatorname{ch} t, y = a \operatorname{sh} t, z = at;$
- 2) $x = e^t, y = e^{-t}, z = \sqrt{2}t;$
- 3) $x = 2t, y = \ln t, z = t^2;$
- 4) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t.$

256. Составьте натуральные уравнения следующих кривых:

- 1) $x = a \operatorname{ch} t, y = a \operatorname{sh} t, z = at;$
- 2) $x = ct, y = \sqrt{2}c \ln t, z = ct^{-1}.$

§ 12. Поверхности в евклидовом пространстве

Поверхность Φ в E_3 задается векторным уравнением

$$\Phi: \vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (1),$$

параметрическими уравнениями вида:

$$\Phi: x = x(u, v); y = y(u, v); z = z(u, v), \quad (2),$$

явным уравнением:

$$\Phi: z = f(x, y) \quad (3),$$

или неявным уравнением:

$$\Phi: F(x, y, z) = 0 \quad (4).$$

Уравнения *касательной плоскости*, соответствующие заданиям поверхности (1) – (4), имеют соответственно вид:

$$(\vec{R} - \vec{r}_0) \cdot \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

$$Z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x} (X - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y} (Y - y_0)$$

$$(X - x_0)F_x + (Y - y_0)F_y + (Z - z_0)F_z = 0$$

и уравнения *нормали*:

$$\vec{R} = \vec{r} + \lambda[\vec{r}_u \vec{r}_v];$$

$$\frac{X - x_0}{-z_x} = \frac{Y - y_0}{-z_y} = \frac{Z - z_0}{1};$$

$$\frac{X - x_0}{F_x} = \frac{Y - y_0}{F_y} = \frac{Z - z_0}{F_z}.$$

Первой квадратичной формой ϕ_1 поверхности Φ называется квадратичная форма вида:

$$\phi_1 = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \text{ где } E = \vec{r}_u^2, F = \vec{r}_u \vec{r}_v, G = \vec{r}_v^2.$$

Длина дуги линии γ , заданной на поверхности Φ внутренними уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$ вычисляется по формуле:

$$S = \int_{t_0}^t \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

Величина угла ϕ между линиями γ_1 и γ_2 :

$$\cos \phi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}$$

где d – дифференцирование вдоль γ_1 , а δ вдоль γ_2

Вторая квадратичная форма имеет вид

$$\phi_2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2, \text{ где } L = \frac{(\vec{r}_u \vec{r}_v \vec{r}_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}; M = \frac{(\vec{r}_u \vec{r}_v \vec{r}_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}}; N = \frac{(\vec{r}_u \vec{r}_v \vec{r}_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Полная кривизна поверхности в точке:

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Средняя кривизна поверхности:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)},$$

где k_1, k_2 – *главные кривизны*.

Практические задания

257. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ в точке $M(3, 5, 7)$.

258. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям:

1) $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$ в точке $M(u = 2, v = 1)$

2) $x = u$, $y = u^3 - 2uv$, $z = u^3 - 3u^2v$ в точке $M(1, 3, 4)$

3) $z = x^8 + y^3$ в точке $M(1, 2, 9)$.

4) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точке $M(3, 4, 12)$.

5) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ в точке $M(3, 1, -1)$

259. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к прямому геликоиду $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$. Исследуйте поведение нормали при смещении ее вдоль координатных линий.

260. Найдите первую квадратичную форму следующих поверхностей:

1) $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$ – параболоид вращения;

2) $x = R \cos v$, $y = R \sin v$, $z = u$ – круговой цилиндр;

3) $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = ku$ ($u \neq 0$) – круговой конус без вершины;

4) $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$ – прямой геликоид.

261. Дана поверхность $x = u^2 + v^2$, $y = u^3 - v^2$, $z = uv$ ($|u| + |v| \neq 0$).

1) Найдите первую квадратичную форму.

2) Вычислите дифференциал длины дуги для линий $u = 2$, $v = 1$, $v = au$.

3) Вычислите длину дуги линии $v = au$ между точками ее пересечения с линиями $u = 1$, $u = 2$.

262. Найдите, под каким углом пересекаются линии $u + v = 0$, $u - v = 0$ на прямом геликоиде $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$.

263. Найдите периметр и внутренние углы криволинейного треугольника $u = \pm av^2/2$, $v = 1$, расположенного на поверхности, у которой $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2$.

264. Найдите угол между линиями $v = 2u$ и $v = -2u$ на поверхности, имеющей первую квадратичную форму $ds^2 = du^2 + dv^2$.

265. Найдите вторую квадратичную форму параболоида вращения:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u^2.$$

266. Найдите вторую квадратичную форму следующих поверхностей:

- 1) $x = R \cos v, y = R \sin v, z = u$ – круговой цилиндр;
- 2) $x = u \cos v, y = u \sin v, z = ku, (u \neq 0)$ – круговой конус без вершины;
- 3) $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$ – прямой геликоид.

267. Найдите главные направления и главные кривизны прямого геликоида $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$.

Линейная алгебра

§13. Матрицы

Матрица – система $m \cdot n$ чисел, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов. Числа этой таблицы называются элементами матрицы.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

Квадратной называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m=n$), т.е. матрица вида

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

Суммой двух матриц A и B одинаковых размеров называется матрица того же размера, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B . Таким образом, если

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{то} \quad A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Произведением матрицы $A = [a_{ij}]$ на число λ называется матрица, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением их на число λ . Произведение матрицы A на число λ будем обозначать λA . Таким образом, если

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{то} \quad \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Произведение AB матрицы A на матрицу B определяется только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Пусть матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix},$$

такие, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . В этом случае произведением матрицы A на матрицу B , которые заданы в определенном порядке (A — первая, B — вторая), является матрица C , элементы c_{ij} которой определяются по следующему правилу:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{\alpha=1}^n a_{i\alpha}b_{\alpha j}, \quad (1)$$

где $i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,k$.

Основные свойства операций над матрицами:

- 1) $A+B=B+A$;
- 2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;
- 3) $A+O=A$;
- 4) $A+(-A)=O$;
- 5) $I \cdot A=A$;
- 6) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;
- 7) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
- 8) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
- 9) $(AB)C=A(BC)$;
- 10) $\alpha(AB)=(\alpha A)B$;
- 11) $(A+B)C=AC+BC$;
- 12) $C(A+B)=CA+CB$;
- 13) $(AB)^T = B^T A^T$.

Пусть дана квадратная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$\Delta = |A|$ - ее определитель.

Если существует матрица X , такая, что $AX=XA=E$, где E — единичная матрица, то матрица X называется **обратной** по отношению к матрице A , а сама матрица A — обратимой. Обратная для A матрица обозначается A^{-1} .

Теорема 1. Для каждой обратимой матрицы существует только одна обратная матрица.

Обратимы только невырожденные матрицы и для матрицы A обратной является матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A .

Практические задания

268. Вычислите $A+B$, AB , BA , $3A$, если:

$$1) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & i \end{bmatrix}; \quad 2) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

269. Вычислите произведение матриц:

$$1) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad 2) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 6 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ -4 & -5 & -3 \end{bmatrix};$$

$$3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & -3 & -6 \\ -4 & -5 & -2 & -1 \end{bmatrix}; \quad 4) \begin{bmatrix} 7 & 11 & 5 & 22 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 9 \\ 4 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -5 & 16 \\ -1 & 3 & -1 & 11 \\ -1 & 4 & -4 & 15 \\ 1 & -4 & 3 & -14 \end{bmatrix};$$

$$5) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad 6) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad 7) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

270. Вычислите $f(A)$, если:

$$1) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 5x + 7; \quad 2) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad f(x) = 3x^2 - 7x - 4;$$

$$3) A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4.$$

271. Найдите матрицы, перестановочные с матрицей A , если:

$$1) A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}; \quad 2) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

272. Найдите матрицы, перестановочные с матрицами A и B , если:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; 2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

273. Возведите в степень:

1) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}^n$; 2) $\begin{bmatrix} i & i \\ 0 & i \end{bmatrix}^n$; 3) $\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^n$; 4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^n$.

274. Произведите умножение матриц в указанном порядке:

1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$; 2) $[1 \ -3 \ -2] \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} [-3 \ 4]$; 4) $[0 \ -1] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

275. Вычислите выражение:

1) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}^5$; 2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n$; 3) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}^n$, где $a^2 + bc = 1$; 4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$;

276. Найти матрицу:

1) $A^2 - 12E$, где $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

2) $(A - 2E)^2(A - E)$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $A^2 + B^2$, где $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

277. Найти A^{-1} , если:

1) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, где $ad - bc \neq 0$; 2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; 3) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; 4) $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$;

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; 6) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; 7) $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; 8) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

9) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$; 10) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; 11) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

278. Найти A^{-1} , если:

$$1) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}; 2) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; 3) A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}; 4) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$5) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; 6) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}; 7) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix};$$

$$8) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; 9) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{bmatrix}; 10) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix};$$

$$11) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; 12) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{bmatrix};$$

$$13) A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; 14) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Примечание: В упражнениях 11) – 14) матрица A n – го порядка.

279. Найти матрицу X из следующих уравнений:

$$1) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}; 2) X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}; 3) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix};$$

$$4) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; 5) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$6) X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}; 7) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix};$$

$$8) X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}; 9) X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
10) \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -9 & 10 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; 11) \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}; \\
12) \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \cdot X &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; 13) X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; 14) \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \\
15) \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}; 16) X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}; \\
17) \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}; 18) \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}; \\
19) X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}; 20) \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}; \\
21) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; 22) X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \\
23) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; 24) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \\
25) X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; 26) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

280. Найти все матрицы X , удовлетворяющие условию:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение: Так как матрица $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ вырожденная, предыдущий метод

неприменим. Поэтому задачу нужно решать иначе. Записываем матрицу X

в виде $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, тогда уравнение принимает вид: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; или

после выполнения действий в левой части: $\begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \\ 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Отсюда:

$$2x_1 + x_3 = 2, \quad 2x_2 + x_4 = 1.$$

Мы получили систему 2-х уравнений с четырьмя неизвестными. Решая её, находим: $x_3 = 2 - 2x_1$,

$$x_4 = 1 - 2x_2.$$

Таким образом, общий вид матрицы X есть: $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 2-2x_1 & 1-2x_2 \end{bmatrix}$, где x_1 и x_2 - любые числа.

281. Найти все матрицы X , удовлетворяющие условию:

$$1) \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}; 2) X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}; 3) \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix};$$

$$4) X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; 5) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; 6) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

§14. Определители

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\Delta = \det A = \det(a_{ij}) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель n -го порядка матрицы (1) есть число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{I(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}. \quad (2)$$

где $I(k_1, k_2, \dots, k_n)$ – общее число инверсий перестановки $(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Здесь суммирование распространяется на всевозможные перестановки индексов элементов a_{ij} , т. е. на всевозможные перестановки $(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Числа a_{ij} называются элементами определителя.

Для определителя третьего порядка удобно пользоваться следующей схемой:

Основные свойства определителей:

Свойство 1. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется.

Свойство 2. Если все элементы некоторой строки определителя состоят из нулей, определитель равен нулю.

Свойство 3. От перестановки двух строк определитель меняет знак.

Свойство 4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

Свойство 5. Общий множитель всех элементов некоторой строки определителя можно вынести за знак определителя.

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на одно и то же число, то определитель умножается на это число.

Свойство 6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

Свойство 7. Если все элементы i -й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i -й, те же, что и у данного определителя; i -я строка одного определителя состоит из первых слагаемых элементов i -й строки данного определителя, а i -я строка другого — из вторых слагаемых элементов i -й строки.

Свойство 8. Определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Теорема 2. Определитель любого порядка равен сумме парных произведений элементов любого ряда на их алгебраическое дополнения.

Практические задания

282. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

283. Вычислить определители, пользуясь только определением:

$$\begin{aligned}
& 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} \log_b a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & \log_{a^2} b \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; 5) \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}; \\
& 6) \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \dots & -3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -n & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; 7) \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}; 8) \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}; 9) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}; \\
& 10) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

284. Решить уравнения:

$$\begin{aligned}
& 1) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & -2 \end{vmatrix} = 0; 2) \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = abc; 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 3-x^2 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 5 \\ -7 & -7 & x & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} x^2-3 \\ x^2-3 \end{matrix} = 0; \\
& 4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 2-x & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 4+x & 12 \\ -4 & x-14 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

285. Разложить следующие определители:

$$\begin{aligned}
& 1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \text{по элементам второго столбца}; \\
& 2) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} - \text{по элементам третьей строки}; \\
& 3) \begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 3 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix} - \text{по элементам второго столбца};
\end{aligned}$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & 3 & d \end{vmatrix} - \text{по элементам четвёртого столбца;}$$

$$5) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \text{по элементам первого столбца;}$$

$$6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ a & b & c & d \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \text{по элементам третьей строки.}$$

286. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$5) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}; 6) \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}; 7) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix};$$

$$8) \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

287. Вычислить определители:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}; 5) \begin{vmatrix} -5 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 17 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 9 & 0 \\ 15 & 13 & 9 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}; 6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix};$$

[illegible]

Где $x_1, x_2, \dots, x_n$ -неизвестные, значения которых подлежат нахождению. Как видно из структуры системы (1), в общем случае число неизвестных не обязательно должно быть равно числу уравнений самой системы. Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ называют коэффициентами системы, а $b_1, b_2, \dots, b_m$ -ее свободными членами. Для удобства коэффициенты системы a_{ij} ($i=1,2, \dots, m; j=1,2, \dots, n$) и свободные члены b_i ($i=1,2, \dots, m$) снабжены индексами. Первый индекс коэффициентов a_{ij} соответствует номеру уравнения, в которое входит этот коэффициент, а второй индекс – номеру неизвестной x_i , при которой коэффициент поставлен. Индекс свободного члена b_i соответствует номеру уравнения, в которое входит b_i .

Дадим определение некоторых понятий, необходимых при изучении систем уравнений. ***Решением системы уравнений (1)*** называется всякая упорядоченная совокупность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, которая будучи подставлена в систему (1) на место неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, обращает все уравнения системы в тождества. Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если не имеет решений. Совместная система уравнений называется ***определенной***, если она имеет одно единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет по крайней мере два различных решения.

Две системы уравнений называются **равносильными** или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений. Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

[illegible]

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{a}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

составленный из коэффициентов a_{ij} , называется *определителем системы* (2).

Рассмотрим случай, когда $\Delta \neq 0$. В этом случае система (3) является определенной, т.е. имеет единственное решение.

В определителе Δ i -й столбец заменим столбцом свободных членов. Обозначив этот определитель Δ_{x_i} , будем иметь

$$\Delta_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_n & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}.$$

Придавая индексу i значения $1, 2, \dots, n$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \\ x_2 &= \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \\ &\dots\dots\dots; \\ x_n &= \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Практические задания

290. Решите систему по правилу Крамера:

$$1) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 11; \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 24; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 4; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = -12; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -13; \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 4; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2; \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 6x_4 = -6; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -8; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 19; \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -2; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 13; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 15; \\ x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = -7; \\ x_1 - 7x_3 + 8x_4 - x_5 = -30; \\ 3x_1 - x_2 - 5x_5 = 4; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 2; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3 = 0; \\ 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 2; \\ 2x_1 - 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$

§16. Ранг матрицы

Рассмотрим произвольную прямоугольную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Выделим некоторое число k строк этой матрицы и такое же число столбцов. Элементы матрицы (1), стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k -го порядка. Определитель этой матрицы называется **минором k -порядка матрицы A** . Если не все числа a_{ij} матрицы A равны нулю, то всегда можно указать число r такое, что у матрицы A имеется минор r -го порядка, отличный от нуля, а всякий минор имеющий порядок $r+1$ и выше, равен нулю.

Число r , обладающее отмеченным свойством, называется **рангом матрицы A** и обозначается $\text{rang } A$. Если все элементы a_{ij} равны нулю, то ранг матрицы принимается равным нулю. Отличный от нуля минор r -го порядка матрицы A (таких миноров у матрицы A может быть и несколько, но все они имеют один и тот же порядок r) называется **базисным минором матрицы A** . Строки и столбцы, из которых построен базисный минор, называются **базисными**.

Простым способом вычисления ранга матрицы является **метод Гаусса**, основанный на так называемых **элементарных преобразованиях**, выполняемых над матрицей. Такими преобразованиями будем считать:

1. вычеркивание строки, состоящей из нулей;
2. прибавление к элементам одной из строк соответствующих элементов другой строки, умноженных на любое число;
3. перестановку двух столбцов.

Теорема 2. *Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.*

Метод Гаусса вычисления ранга матрицы заключается в том, что путем элементарных преобразований можно привести данную матрицу к виду

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1r} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2r} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{rr} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{rn} \end{bmatrix},$$

в котором все диагональные элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы других строк, расположенные ниже диагональных, равны нулю.

Учитывая, что ранг не меняется при элементарных преобразованиях, имеем $\text{rang } A = \text{rang } B$.

Практические задания

291. При помощи элементарных преобразований найти ранги следующих матриц:

$$1) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{bmatrix}; \quad 2) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad 3) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix};$$

$$4) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}; \quad 5) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad 6) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix};$$

$$7) \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{bmatrix}; \quad 8) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$9) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 11 \\ -1 & -4 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}; \quad 10) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & -12 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 13 & -7 & 3 \end{bmatrix};$$

$$11) \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 3 & -1 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & -7 & -5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad 12) \begin{bmatrix} 75 & 0 & 116 & -39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{bmatrix};$$

292. Найти ранги следующих матриц:

$$1) \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}; \quad 2) \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ a & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 11 & 1 & 2a \end{bmatrix}; \quad 3) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 2 & a \end{bmatrix}; \quad 5) \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{bmatrix}; \quad 6) \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix};$$

$$7) \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad 8) \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & c \\ 1 & 1 & a & d \end{bmatrix}; \quad 9) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ a & b & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

293. Вычислите ранг матриц:

$$1) \begin{bmatrix} 4 & 9 & 0 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 9 & 6 \end{bmatrix}; \quad 2) \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ -6 & 9 & -1 & -2 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 12 & -3 \end{bmatrix};$$

$$3) \begin{bmatrix} 2 & -9 & -5 & -2 & 9 & -5 \\ 4 & 4 & 2 & 7 & -4 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad 4) \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & -3 & -5 & -7 & -8 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & -4 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & -4 & 0 & 15 \\ 7 & 15 & 22 & 11 & 14 & 10 \end{bmatrix};$$

$$5) \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & -5 & -9 & -2 & -8 \\ 3 & 11 & 12 & 9 & 5 & 11 \\ 2 & 26 & 8 & -2 & 16 & -2 \\ 23 & -4 & 19 & 28 & -9 & 31 \end{bmatrix}.$$

§17. Метод Гаусса решения общей системы линейных уравнений

Практическое значение правила Крамера для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными невелико, так как при его применении приходится вычислять $n+1$ определителей n -го порядка: $\Delta, \Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$. Более удобным является так называемый **метод Гаусса**. Он применим и в более общем случае системы линейных уравнений, т.е. когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

Итак, пусть дана система, содержащая m линейных уравнений с n неизвестными:

[illegible]

Метод Гаусса решения системы (1) заключается в последовательном исключении неизвестных.

Если среди уравнений системы есть хотя бы одно уравнение вида

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b, \quad (2)$$

причем $b \neq 0$, то совершенно очевидно, что ни одна система значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ не удовлетворяет этому уравнению, а следовательно, и системе в целом, поэтому система несовместна.

На практике процесс решения системы уравнений облегчается тем, что указанным выше преобразованиям подвергают не саму систему, а матрицу

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{a}_{1n} & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{a}_{2n} & \mathbf{b}_2 \\ \dots & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{a}_{mn} & \mathbf{b}_m \end{bmatrix}, \quad (3)$$

составленную из коэффициентов уравнений системы (1) и их свободных членов. При этом каждому элементарному преобразованию, проведенному над системой (1), соответствует преобразование над матрицей (3): вычеркивание строки, все элементы которой состоят из нулей, прибавление к элементам некоторой строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на некоторое число, и перестановка двух столбцов матрицы (3).

Практические задания

294. Решите системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 12x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_4 = -1; \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 5; \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = -3; \\ 7x_1 - x_2 + x_3 - 9x_4 = -4; \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 = -1; \\ 6x_1 + x_2 - 2x_4 = -1; \\ 6x_1 - 7x_2 + 21x_3 + 4x_4 = 3; \\ 9x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 3; \\ 12x_1 - 6x_2 + 21x_3 + 2x_4 = 1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 = -1; \\ 5x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 3; \\ 9x_1 + 2x_2 + 34x_3 + 23x_4 = 3; \\ 7x_1 + 4x_2 + 26x_3 + 20x_4 = 4; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} -2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -3; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 1; \\ x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 = -1; \\ 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1; \\ 3x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 11; \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 13; \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 6; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \\ 6x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 23; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 4; \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 = 1; \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 7; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5; \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 5; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 11x_5 = 8; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2; \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 20x_5 = 16; \\ x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 6x_4 + x_5 = 56; \\ 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 9x_5 = 6; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 3; \\ x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -7; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 2; \end{cases}$$

295. Решите системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3; \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = \lambda; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (-1+2\lambda)x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 2 - \lambda; \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = -1; \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$