МИНПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИИ
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный педагогический университет
им. М. Акмуллы»

Вильданова В.Ф., Кудашева Е.Г.

Элементарная математика

Методическое пособие

Часть1

Уфа 2022

УДК 512
ББК 22.1
В46

*Печатается по решению учебно-методического совета
Башкирского государственного педагогического университета
им. М.Акмуллы*

Вильданова В.Ф., Кудашева Е.Г.
«Элементарная математика» Часть1 [Текст]: Методическое пособие / Вильданова В.Ф., Кудашева Е.Г. – Уфа: Изд-во БГПУ, 2022. – 68с.

ISBN 978-5-907475-59-5

Содержание

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для студентов, обучающихся по программе бакалавриата направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки, один из которых математика), и школьников выпускных классов, готовящихся к сдаче единого государственного экзамена. В пособии 4 главы, в каждой из которых приведен необходимый теоретический материал, разобраны примеры по основным методам решения. В конце параграфов даны задачи для самостоятельного решения.

Глава 1. Уравнения, системы и неравенства

1. Рациональные уравнения

Равенство вида $f(x) = \varphi(x)$, где $f(x)$, $\varphi(x)$ некоторые функции от x, называется *уравнением с одной переменной* x. Областью допустимых значений (для краткости ОДЗ) уравнения называется общая часть областей определения функций, входящих в состав уравнения, т. е. множество всех значений неизвестного, при которых все функции, входящие в уравнение, имеют смысл. Решением или корнем уравнения, называется всякое значение неизвестного, при подстановке которого в обе части уравнения получается справедливое числовое равенство (тождество). Отметим, что все решения уравнения, по определению, должны входить в ОДЗ. Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет. Если все корни одного уравнения являются корнями другого, то второе уравнение называется следствием первого.

Два уравнения называются *равносильными или эквивалентными*, если каждое из них является следствием другого.

Из последнего определения сразу же ясно, что равносильные уравнения имеют одни и те же корни. При решении уравнений очень часто оказывается полезным еще одно понятие, связанное с равносильностью уравнений. Два уравнения называются *равносильными на некотором данном множестве*, если в этом множестве они имеют одинаковые корни. Из определения равносильности уравнений сразу же следует, что вместо того чтобы решать данное уравнение, можно решать любое уравнение, ему равносильное. Если же мы заменим наше уравнение *следствием*, то при решении нового уравнения мы можем получить корни, не являющиеся корнями исходного уравнения, т.е. посторонние корни. Однако при решении уравнений учащиеся иногда применяют преобразования, приводящие к уравнению, не являющемуся следствием предыдущего. А в этом случае некоторые корни исходного уравнения не удовлетворяют преобразованному уравнению, так что, решив новое уравнение, мы все равно не получим всех корней исходного уравнения, т. е. корни будут потеряны. Такие преобразования, разумеется, не допустимы, так как они не ведут к решению уравнения.

Таким образом, при замене некоторого уравнения новым происходит следующее:

1) если новое уравнение не является следствием данного, то корни теря-

ются;

2) если новое уравнение является следствием данного, но не равносильно ему, то появляются посторонние корни;

3) если новое уравнение равносильно данному, то их корни совпадают.

Конечно, при решении уравнений лучше всего переходить каждый раз к равносильному. Однако это далеко не всегда удается. Если решение проводилось без анализа равносильности уравнений, проверка является неотъемлемой частью решения, без которой оно не может быть признано полноценным.

Рассмотрим основные методы решения уравнений больше чем второй степени.

I. Метод группировки. Путем группировки слагаемых, применения формул сокращенного умножения приводим (если удастся) уравнение к виду, когда слева записано произведение нескольких сомножителей, а справа – ноль. Затем приравниваем к нулю каждый из сомножителей.

Пример 1. Найти корни уравнения:

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0.$$

Решение: выделим подобные слагаемые и сгруппируем

$$x^3-ax^2-\underline{bx^2}-\underline{\underline{cx^2}}+\underline{abx}+\underline{\underline{acx}}+\underbrace{bcx-abc}=0,$$

$$x^2(x-a)-bx(x-a)-cx(x-a)+bc(x-a)=0,$$

$$(x-a)(x^2-bx-cx+bc)=0.$$

Откуда следует:

$x-a=0,$

$x_1=a.$

или

$x^2-bx-cx+bc=0,$

$x(x-b)-c(x-b)=0,$

$(x-b)(x-c)=0 \Rightarrow x-b=0, x_2=b, x-c=0, x_3=c$

Ответ: a; b; c.

II. Метод подстановки. Ищем в уравнении некоторые повторяющееся выражение, которое обозначим новой переменной, тем самым упрощая вид уравнения. В некоторых случаях, очевидно, что удобно обозначить. Например, уравнение

$$\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0 \qquad (*)$$

легко решается с помощью подстановки $\dfrac{x^2+x-5}{x}=t,$ где $t\neq 0$ уравнение (*) принимает вид $t+\dfrac{3}{t}+4=0.$ Или $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6.$ Здесь можно сделать подстановку $x^2-4x=t$. Тогда $\dfrac{21}{t+10}-t=6$ и т.д.

В более сложных случаях подстановка видна лишь после преобразований.

Например, дано уравнение

$$(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55.$$

Переписав его иначе, а именно $(x^2+2x)^2-(x^2+2x+1)=55,$ сразу увидим подстановку $x^2+2x=t.$ Имеем $t^2-t-56=0,$ $t_1=-7, t_2=8.$ Осталось решить $x^2+2x=-7$ и $x^2+2x=8$.

В ряде других случаев удобную подстановку желательно знать заранее. Например,

1) Уравнение $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ сводится к *биквадратному* уравнению, если сделать подстановку $x=t-\dfrac{a+b}{2}.$

2) Симметрическое уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ (коэффициенты членов, равноотстоящих от концов, равны) решается с помощью подстановки $x+\dfrac{1}{x}=t,$ если n – четное; если n – нечетное, то уравнение имеет корень $x=-1.$

3) Уравнение вида $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=l$ сводится к квадратному, если $a+b=c+d$ и т.д.

Пример 2. Найти корни уравнения $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680.$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$(x-4)(x-7)\cdot(x-5)(x-6)=1680,$ т.е.

$$(x^2-11x+28)(x^2-11x+30)=1680.$$

Обозначим $x^2-11x+28=t$, тогда

$t(t+2)=1680,$ $t^2+2t-1680=0,$ $t_1=-42,$ $t_2=40$. Поэтому

$x^2-11x+28=-42$		$x^2-11x+28=40$
$x^2-11x+70=0,$	или	$x^2-11x-12=0,$
$x_{1,2}\in\varnothing$		$x_1=12, x_2=-1.$

Ответ: 12; -1.

Пример 3. Решить уравнение $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$ (симметрическое уравнение).

Решение. Разделим обе части уравнения на $x^2\neq 0,$ получим

$2x^2+3x-16+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}=0$, т.е.

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0.$$

Обозначим $x+\dfrac{1}{x}=t$, тогда

$x^2+2x\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=t^2$, т.е. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$. Получаем $2(t^2-2)+3t-16=0$, т.е. $2t^2+3t-20=0, t_1=-4, t_2=\dfrac{5}{2}$. Следовательно, имеем

$x+\dfrac{1}{x}=-4$ или $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$.

$x^2+4x+1=0,$ $2x^2-5x+2=0,$

$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}.$ $x_3=2, x_4=\dfrac{1}{2}.$

Ответ: $-2\pm\sqrt{3};\ 2;\ \dfrac{1}{2}.$

Пример 4. Решить уравнение $(x+3)^4+(x+5)^4=16.$

Решение. Сделаем подстановку $x=t-\dfrac{3+5}{2}$, т.е. $x=t-4$, тогда получаем $(t-1)^4+(t+1)^4=16,$ т.е. $t^4-4t^3+6t^2-4t+1+t^4+4t^3+6t^2+4t+1=16,$ $2t^4+12t^2-14=0$ или $t^4+6t^2-7=0$. Положим, $t^2=z\geq 0,$ тогда $z^2+6z-7=0\Rightarrow z_1=-7, z_2=1.$

С учетом $t^2=z\geq 0$ отбрасываем z_1. Итак, $z=1$, т.е. $t^2=1,$ отсюда $t_1=-1, t_2=1$. Следовательно, $x=-1-4, x=1-4$, т.е. $x_1=-5, x_2=-3.$

Ответ: $-5;\ -3.$

Пример 5. Решить уравнение $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{40}{9}.$

Решение. ОДЗ: $x\neq -1$. Поскольку в левой части стоит сумма двух квадратов, дополним ее до квадрата суммы или разности.

$$x^2-\frac{2x^2}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}-\frac{2x^2}{x+1},$$

$$\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{40}{9}-\frac{2x^2}{x+1},$$

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2=\frac{40}{9}-2\frac{x^2}{x+1}.$$

Введем новую переменную

$$\frac{x^2}{x+1}=y;\ y^2=\frac{40}{9}-2y;\ y_1=\frac{4}{3};\ y_2=-\frac{10}{3}.$$

Тогда получим два квадратных уравнения:

1) $\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{4}{3};\ 3x^2=4x+4;\ x_1=-\dfrac{2}{3};\ x_2=2.$

2) $\dfrac{x^2}{x+1} = -\dfrac{10}{3}$; $3x^2 + 10x + 10 = 0$. Уравнение действительных корней не имеет.

Ответ: $-\dfrac{2}{3}$; 2.

III Метод подбора при решении уравнений высших степеней.

Одним из способов решения уравнений высших степеней является разложения на множители многочлена, стоящего в левой части уравнения. Этот способ основан на применении теоремы Безу: если число a является корнем многочлена $P_n(x)$, то этот многочлен можно представить в виде $P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x)$.

Это значит, что если известен один корень уравнения степени n, то с помощью теоремы Безу задачу можно свести к решению уравнения степени $n-1$, или, как говорят, понизить степень уравнения. Если $P_n(x)$ можно представить в виде $(x-a)^k Q_{n-k}(x)$ и число $x = a$ не является корнем многочлена $Q_{n-k}(x)$, то говорят, что a является корнем многочлена $P_n(x)$ кратности k.

Появляется вопрос: как найти хотя бы один корень? Его приходится «угадывать». Чтобы понять, как угадывать, приведем без доказательства теорему и ее следствия.

Теорема 1. Пусть несократимая дробь $\dfrac{p}{q}$ является корнем уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми коэффициентами. Тогда число p является делителем свободного члена a_n, а q - делителем a_0 - коэффициента при старшей степени x.

Следствие 1. Любой целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

Следствие 2. Если коэффициент при старшей степени уравнения с целыми коэффициентами равен 1, то все рациональные корни уравнения, если они существуют, являются целыми числами.

Если удалось угадать корень a, то найти частное от деления на $(x-a)$ можно, по крайней мере, тремя способами: делением под углом; по схеме Горнера; последовательным выделением слагаемых, имеющих множитель $(x-a)$.

Метод 2 (схема Горнера). Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ и пусть

$$f(x) = (x-c)g(x) + r, \qquad (*)$$

где $g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-2}x + b_{n-1}$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в (*), получаем

$a_0 = b_0$ $\qquad$ $b_0 = a_0$

$a_1 = b_1 - cb_0$ $\qquad$ $b_1 = cb_0 + a_1$

$$a_2 = b_2 - cb_1 \qquad\qquad b_2 = cb_1 + a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = b_{n-1} - cb_{n-2} \qquad\qquad b_{n-1} = cb_{n-2} + a_{n-1}$$
$$a_n = r - cb_{n-1} \qquad\qquad r = cb_{n-1} + a_n,$$

т. е. каждый следующий коэффициент b_k получается умножением числа c на предыдущий коэффициент b_{k-1} и прибавлением соответствующего коэффициента a_k. Остаток r, равный $f(c)$, находим по тому же закону. Таким образом, коэффициенты частного и остаток можно последовательно получить при помощи однотипных вычислений, которые располагают в схему.

Пример 6. Решить уравнение $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Решение. Целые корни ищем среди делителей числа -6, т.е. среди чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Число 1 удовлетворяет уравнению, следовательно, $x_1 = 1$. По схеме Горнера получим:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	0

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6).$$

Квадратное уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ имеет два корня $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, т.е. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$.

Ответ:1; 2; 3.

Пример 7. Найти общие корни уравнений

$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 3 = 0$ и $x^4 + x^3 - 5x^2 - 7x - 2 = 0$.

Решение. Пусть *y* – общий корень уравнений, тогда *y* – решение системы

$$\begin{cases} y^4 - 3y^3 + 4y^2 - 5y - 3 = 0 \\ y^4 + y^3 - 5y^2 - 7y - 2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Рассмотрим разность второго и первого уравнений. Имеем

$$4y^3 - 9y^2 - 2y + 1 = 0$$

или $t^3 - 9t^2 - 8t + 16 = 0$, где $t=4y$. Подбором находим корень $t_1 = 1$. По схеме Горнера:

	1	-9	-8	16
1	1	-8	-16	0

$$t^3 - 9t^2 - 8t + 16 = (t-1)(t^2 - 8t - 16).$$

Подставляя в полученное соотношение $t=4y$, приходим к разложению $4y^3 - 9y^2 - 2y + 1 = (4y-1)(y^2 - 2y - 1)$.

Таким образом, если *y* есть решение системы (1), то *y* есть решение уравнения

$$(4y-1)(y^2 - 2y - 1) = 0. \qquad (2)$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т.е. не любой корень уравнения (2) является корнем системы (1). Так, значение $y=\frac{1}{4}$ не удовлетворяет ни одному уравнению (1).

Проверим, делятся ли левые части уравнения (1) на квадратный трехчлен y^2-2y-1.

$$\begin{array}{rl|l}
- & y^4-3y^3+4y^2-5y-3 & y^2-2y-1 \\
 & y^4-2y^3-y^2 & \overline{y^2-y+3} \\ \hline
- & -y^3+5y^2-5y-3 & \\
 & -y^3+2y^2+y & \\ \hline
- & 3y^2-6y-3 & \\
 & 3y^2-6y-3 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl|l}
- & y^4+y^3-5y^2-7y-2 & y^2-2y-1 \\
 & y^4-2y^3-y^2 & \overline{y^2+3y+2} \\ \hline
- & 3y^3-4y^2-7y-2 & \\
 & 3y^3-6y^2-3y & \\ \hline
- & 2y^2-4y-2 & \\
 & 2y^2-4y-2 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Итак, квадратный трехчлен y^2-2y-1 является общим делителем рассматриваемых многочленов. Решаем квадратное уравнение $y^2-2y-1=0$, $y_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$.

Ответ: $1\pm\sqrt{2}$.

IV Нестандартный подход. Общих формул нахождения корней алгебраических уравнений высоких степеней нет и поэтому об их решениях говорят, как об искусстве решать пример нестандартно, придумывая «свой метод», догадаться, что-то прибавить и отнять, выделить полный квадрат, на что-то разделить и умножить и т.д.

Пример 8. Решить уравнение:

$$\frac{13x}{2x^2+x+3}+\frac{2x}{2x^2-5x+3}=6.$$

Решение. Область определения переменной x − все действительные числа, кроме корней знаменателей, т.е. $\begin{cases}2x^2+x+3\neq 0,\\ 2x^2-5x+3\neq 0.\end{cases}$

Разделим числитель и знаменатель дробей на $x\neq 0$:

$$\frac{13}{2x+1+\frac{3}{x}}+\frac{2}{2x-5+\frac{3}{x}}=6,$$

обозначим $2x+\frac{3}{x}=t$. Получаем $\frac{13}{t+1}+\frac{2}{t-5}=6$,т.е.

$13t-65+2t+2=6t^2-24t-30$,

$6t^2-39t+33=0$, т.е. $2t^2-13t+11=0$,

$t_1=1$, $t_2=5\frac{1}{2}$.

Следовательно,

$2x+\frac{3}{x}=1,$ $\qquad$ $2x+\frac{3}{x}=\frac{11}{2},$

$2x^2-x+3=0,$ или $\qquad$ $4x^2-11x+6=0,$

$x\in\varnothing.$ $\qquad$ $x_1=2, x_2=\frac{3}{4}.$

Ответ: $2;\ \frac{3}{4}.$

Пример 9. Решить уравнение: $x^4-2x^3+x-\frac{3}{4}=0.$

Решение. Выделим полный квадрат, прибавив и вычтя в левой части уравнения x^2:

$\underline{x^4-2x^3+x^2}-x^2+x-\frac{3}{4}=0$, т.е.

$(x^2-x)^2-(x^2-x)-\frac{3}{4}=0.$

Пусть $x^2-x=t$, тогда $t^2-t-\frac{3}{4}=0, t_1=-\frac{1}{2}, t_2=\frac{3}{2}.$ Возвращаясь к старой переменной, получаем

$x^2-x=-\frac{1}{2},$ $\qquad$ $x^2-x=\frac{3}{2},$

$x^2-x+\frac{1}{2}=0,$ $\qquad$ или $\qquad$ $x^2-x-\frac{3}{2}=0,$

$x\in\varnothing.$ $\qquad$ $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}.$

Ответ: $\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}.$

Пример 10. Решить уравнение:

$3(x^2-x+1)^2-5(x+1)(x^2-x+1)-2(x+1)^2=0.$

Решение. Это так называемое «однородное уравнение», т.е. уравнение вида $ay^{2\alpha}+by^{\alpha}z^{\alpha}+cz^{2\alpha}=0$, где a,b,c,α- заданные числа, отличные от нуля; $y=y(x), z=z(x)$- некоторые функции от x. Делим обе части уравнения на $z^{2\alpha}\neq 0.$

Получаем $a\left(\frac{y}{z}\right)^{2\alpha}+\left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha}+c=0$. Обозначив $\left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha}=t$, получаем квадратное уравнение относительно *t*.

Разделим обе части данного уравнения на $(x^2-x+1)^2\neq 0$:

$$3-5\frac{x+1}{x^2-x+1}-2\left(\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)^2=0.$$

Пусть $\frac{x+1}{x^2-x+1}=t$, тогда $3-5t-2t^2=0$, т.е. $t_1=-3,\quad t_2=\frac{1}{2}$. Следовательно,

$\frac{x+1}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}$	или	$\frac{x+1}{x^2-x+1}=-3.$
$2x+2=x^2-x+1,$		$x+1=-3x^2+3x-3,$
$x^2-3x-1=0,$		$3x^2-2x+4=0,$
$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$		$x\in\varnothing.$

Ответ: $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$

2. Уравнения с модулем

Вспомним определение модуля числа и модуля функции

$$|x|=\begin{cases} x, \ \text{если}\ x\geq 0,\\ -x, \ \text{если}\ x<0;\end{cases}$$

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), \ \text{если}\ f(x)\geq 0,\\ -f(x), \ \text{если}\ f(x)<0.\end{cases}$$

Разберем основные приемы решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля.

I Модуль любой функции всегда неотрицателен. Проведем предварительный анализ заданного уравнения.

Пример 11. Решить уравнение $|2x+2|+|x-5|+1=0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $|2x+2|+|x-5|=-1$. Здесь в левой части стоит положительное число для всех значений *x*, в правой – отрицательное. Решений нет.

Ответ. Ø.

Пример 12. Решить уравнение $x^2+|1-x|+|3-x|=1$.

Решение. Запишем уравнение в виде $|1-x|+|3-x|=1-x^2$. Левая часть уравнения положительна, поэтому решение может быть только при $1-x^2\geq 0$, т.е. при $-1\leq x\leq 1$. Однако при таких значениях *x* наименьшее значение, достигаемое левой частью, равно 2, а наибольшее значение, достигаемое правой частью, равно 1. Поэтому уравнение решений не имеет.

Ответ: Ø.

II Уравнения вида $|f(x)|=a$*, где а – число.* Если $a<0$, то решений нет; если a=0, то $f(x)$=0. При $a>0$ уравнение $|f(x)|=a$ эквивалентно совокупности уравнений $f(x)=a$ и $f(x)=-a$.

Пример 13. Решить уравнение $\left|x^2-4x\right|=4$.

Решение. Уравнение эквивалентно совокупности уравнений $x^2-4x=4$ и $x^2-4x=-4$. Из первого уравнения $x_{1,2}=2\pm\sqrt{8}$, из второго $x_{3,4}=2$.

Ответ. 2; $2\pm\sqrt{8}$.

Пример 14. Решить уравнение $\left|x^2-3|x|+1\right|=1$.

Решение. Уравнение эквивалентно совокупности уравнений $x^2-3|x|+1=1$ и $x^2-3|x|+1=-1$. Пусть $|x|=t$, тогда $x^2=t^2$. Получаем уравнения $t^2-3t=0$ и $t^2-3t+2=0$. Определяем все корни $t_1=0, t_2=3, t_3=1, t_4=2$. Учитывая, что $|x|=t$, находим значение *x*.

Ответ. 0; $\pm 1; \pm 2; \pm 3$.

III Уравнение вида $|f(x)|=|g(x)|$ эквивалентно уравнению $f^2(x)=g^2(x)$.

Пример 15. Решить уравнение $|2x-5|=|7-3x|$.

Решение. Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем эквивалентное уравнение $(2x-5)^2=(7-3x)^2$, откуда $5x^2-22x+24=0$. Корни квадратного уравнения $x_1=2, x_2=\dfrac{12}{5}$.

Ответ. 2; $\dfrac{12}{5}$.

Пример 16. Решить уравнение $\left|x^2-4\right|=\left|x^2-14\right|$.

Решение. Эквивалентное уравнение $\left(x^2-4\right)^2=\left(x^2-14\right)^2$, откуда получаем квадратное уравнение $x^2-9=0$. Его корни $x=\pm 3$.

Ответ. ± 3.

Пример 17. Решить уравнение $\left|2x^2-3\right|=\left|4-3x^2\right|$.

Решение. Эквивалентное уравнение $\left(2x^2-3\right)^2=\left(4-3x^2\right)^2$, откуда получаем биквадратное уравнение

$5x^4-12x^2+7=0.$ Решая это уравнение, находим $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm\sqrt{\dfrac{7}{5}}$.

Ответ: $\pm 1; \pm\sqrt{\dfrac{7}{5}}$.

IV Уравнение вида $|f(x)|=g(x)$ эквивалентно совокупности систем

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

Находим корни уравнений систем и среди полученных корней отбираем те, которые удовлетворяют неравенству $g(x)\ge 0$.

Пример 18. Решить уравнение $|5x+2| = 3-3x.$

Решение. Составляем эквивалентную совокупность систем

$$\begin{cases} 5x+2 = 3-3x, \\ 3-3x \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -5x-2 = 3-3x, \\ 3-3x \geq 0. \end{cases}$$

Корни уравнений $x_1 = \frac{1}{8}$ и $x_2 = -\frac{5}{2}$. Оба решения удовлетворяют неравенству $3-3x \geq 0$.

Ответ: $\frac{1}{8}; -\frac{5}{2}.$

Пример 19. Решить уравнение $|x^3 - x| = x+4.$

Решение. Составляем для заданного уравнения эквивалентную совокупность систем. Имеем

$$\begin{cases} x^3 - x = x+4. \\ x+4 \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x^3 + x = x+4. \\ x+4 \geq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение $x^3 - 2x - 4 = 0$. Подбором находим корень $x = 2$. По схеме Горнера делим $x^3 - 2x - 4$ на $x-2$.

	1	0	-2	-4
2	1	2	2	0

Квадратное уравнение $x^2 + 2x + 2 = 0$ корней не имеет. Значение $x = 2$ удовлетворяет неравенству $x+4 \geq 0$. Второе уравнение $x^3 = -4$ имеет один корень $x = -\sqrt[3]{4}$, который также удовлетворяет неравенству $x+4 \geq 0$.

Ответ: 2; $-\sqrt[3]{4}$.

V Уравнения вида $|f_1(x)| + |f_2(x)| + ... + |f_n(x)| = g(x)$ (вместо одного знака «+» или нескольких здесь может стоять и знак «-») лучше всего решать методом интервалов, сущность которого в данном случае заключается в следующем:

а) находим критические точки, т.е. значения x, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль. Критические точки разбивают числовую ось на интервалы, на каждом из которых выражения под модулем сохраняют знак;

б) раскрываем все модули на каждом интервале и решаем полученное уравнение (без модулей);

в) объединение найденных решений составляет множество решений заданного уравнения.

Следует отметить, что метод интервалов можно применять и при $n=1$, т.е. в случае уравнения вида $|f(x)| = g(x)$.

Пример 20. Решить уравнение $|3x+2| = 3-2x$.

Решение. Выражение под модулем обращается в ноль при $x = -\frac{2}{3}$. Это критическая точка. Она разбивает числовую ось на два интервала. Изменение знака функции $y=3x+2$ следующее:

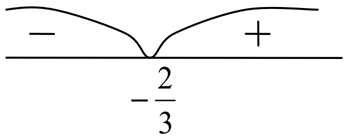


Рисунок 1

Раскрываем модуль на каждом интервале.

а) $\begin{cases} x<-\frac{2}{3}, \\ -3x-2=3-2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-\frac{2}{3}, \\ x=-5, \end{cases} \Rightarrow x=-5.$

б) $\begin{cases} x\ge-\frac{2}{3} \\ 3x+2=3-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge-\frac{2}{3} \\ x=\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{5}.$

Ответ. -5; $\frac{1}{5}$.

Пример 21. Решить уравнение $|4-x|+|2x-2|=5-2x$.

Решение. Здесь две критические точки $x_1=1$ и $x_2=4$. Они разбивают числовую ось на три интервала

(а) $\begin{cases} x<1, \\ 4-x-2x+2=5-2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1, \\ x=1, \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing.$

(б) $\begin{cases} 1\le x<4, \\ 4-x+2x-2=5-2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\le x<4, \\ x=1, \end{cases} \Rightarrow x=1.$

(в) $\begin{cases} x\ge 4, \\ x-4+2x-2=5-2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 4, \\ x=\frac{11}{5}, \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing.$

Здесь пункт (в) можно было не делать, так как в правой части должно быть $5-2x\ge 0$, т. е. $x\le\frac{5}{2}$.

Ответ: 1.

VI Использование свойств модуля

Пример 22. Решить уравнение $\left|x^2-3\right|+|x-1|=\left|x^2+x-4\right|$.

Решение. Заметим, что $\left|x^2+x-4\right|=\left|\left(x^2-3\right)+(x-1)\right|$, то есть, имеем уравнение вида $|a|+|b|=|a+b| \Leftrightarrow a\,b\ge 0$ по свойству модуля. Поэтому

$$\left|x^2-3\right|+|x-1|=\left|x^2+x-4\right| \Leftrightarrow \left(x^2-3\right)\cdot(x-1)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)\cdot(x-1)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3}\leq x\leq 1 \\ x\geq\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

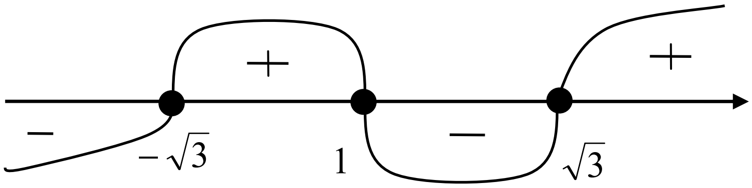


Рисунок 2

Ответ: $\left[-\sqrt{3};1\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$.

Пример 23. Решить уравнение $\left|x^2+3x-4\right|+x^2=\left|3x-4\right|$.

Решение. Заметим, что

$\left|x^2+3x-4\right|+\left|x^2\right|=\left|x^2+3x-4-x^2\right|=\left|3x-4\right|$, то есть данное уравнение вида $|a-b|=|a|+|b| \Leftrightarrow a\,b\leq 0$, тогда

$$\left|x^2+3x-4\right|+x^2=\left|3x-4\right| \Leftrightarrow \mathrm{x}^2(x^2+3x-4)\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x-1)\cdot(x+4)\leq 0 \Leftrightarrow -4\leq \mathrm{x}\leq 1.$$

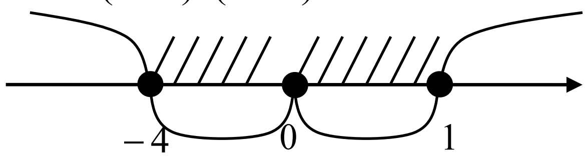


Рисунок 3

Ответ: $[-4;1]$.

Пример 24. Решить уравнение $\left|2x-x^2\right|+\left|5x-6\right|+\left|8-x\right|=x^2+4x-14$.

Решение. Заметим, что $x^2+4x-14=\left(-2x+x^2\right)+(5x-6)+(x-8)$, поэтому мы имеем следующую конструкцию уравнения:

$$|a|+|b|+|c|=-a+b-c \Leftrightarrow \begin{cases} a\leq 0, \\ b\geq 0, \\ c\leq 0. \end{cases}$$

Поэтому $\left|2x-x^2\right|+\left|5x-6\right|+\left|8-x\right|=x^2+4x-14 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-x^2\leq 0, \\ 5x-6\geq 0, \\ 8-x\leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq 0, \\ x\geq 2, \end{array}\right. \\ x\geq 8, \\ x\geq \dfrac{6}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\geq 8.$$

Ответ: $[8;+\infty)$.

Пример 25. Решить уравнение
$$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+\ldots+|x-100|+|x+100|=200x.$$

Решение. Запишем правую часть данного уравнения в виде
$$200x=(x-1)+(x+1)+(x-2)+\ldots+(x-100)+(x+100).$$

То есть, имеем уравнение вида
$$|f_1|+|f_2|+\ldots+|f_n|=f_1+f_2+\ldots+f_n \Leftrightarrow (|f_1|-f_1)+(|f_2|-f_2)+\ldots+$$
$$+\ (|f_n|-f_n)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{f}_1 \geq 0 \\ f_2 \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n \geq 0. \end{cases}$$

Тогда данное уравнение равносильно системе неравенств:
$$\begin{cases} \mathrm{x}\text{-}1 \geq 0 \\ \mathrm{x}+1 \geq 0 \\ \mathrm{x}\text{-}2 \geq 0 \\ \mathrm{x}+2 \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x-100 \geq 0 \\ x+100 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 100.$$

Ответ: $[100;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1. $3\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$.
2. $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.
3. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{10}{9}$.
4. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.
5. $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$.
6. $27x^3+9x^2-48x+20=0$.
7. $(x+2)(x-3)(x+1)(x+6)+96=0$.
8. $x^4+4x-1=0$.
9. $x^4-4x^3-18x^2-12x+9=0$.
10. $(x^2-3x+1)^2+3(x-1)(x^2-3x+1)=4(x-1)^2$.
11. $\dfrac{6x}{x^2+2x+3}-2+\dfrac{11x}{x^2+7x+3}=0$.
12. $|5-3x|=2x+1$.

13. $|3x-8|-|3x-2|=6$.

14. $1+x+|x^2-x-3|=0$.

15. $x^2-7=|3x-7|$.

16. $x|2x+5|+2x|x-3|=22$.

17. $||x+3|-|x-1||=2-x^2$.

18. $(1+x)\cdot|x+2|+x|x-3|=6x+2$.

19. $|2x-3|=3-2x$.

20. $|x-1|+x-3=2x-4$.

21. $2|x^2+2x-5|=x-1$.

22. $x|3x+5|=3x^2+4x+3$.

23. $||x^2-3x|-5|=x+1$.

24. $||x^3-\sqrt{x+1}|-3|=x^3+\sqrt{x+1}-7$.

25. $||x^2-3x|-x+1|=2x^2+x-1$.

26. $||x^3+x^2-1|-4|=x^3-x^2+3$.

27. $x=1-5(1-5x^2)^2$.

3. Системы алгебраических уравнений

Рассмотрим основные методы решения систем уравнений на примерах.

I Способ подстановки: из какого-либо уравнения системы выражаем одно неизвестное через другое и подставляем в оставшиеся уравнения системы.

Пример 26. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения находим, что

$$z=7-2x-y. \qquad (1)$$

Подставляем это выражение для z во второе и третье уравнения. Тогда

$$\begin{cases} x+2y+7-2x-y=8, \\ x+y+14-4x-2y=9, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} -x+y=1, \\ -3x-y=-5. \end{cases}$$

Повторяем этот процесс: $y=x+1$, то $-4x=-4$. Отсюда, $x=1$. Подставляем $x=1$ в равенство $y=x+1$, $y=2$. Значения $x=1, y=2$ подставляем в равенство (1): $z=7-2-2=3$.

Ответ: $x=1, y=2, z=3$.

II Способ алгебраического сложения поясним на примере.

Пример 26. Требуется найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2 y + xy^2 = 20. \end{cases}$$

Решение. Умножим второе уравнение на 3 и сложим с первым уравнением

$$\begin{cases} x^2 y + xy^2 = 20, \\ (x+y)^3 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 20, \\ x + y = 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Систему можно решить методом подстановки, но здесь и так понятно, что

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Ответ: (4,1), (1,4).

III Способ введения новых переменных. Суть метода поясним на следующих примерах.

Пример 27. Найти решение системы уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 - xy} + \dfrac{4}{y^2 - xy} = -\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{7}{x^2 - xy} - \dfrac{3}{y^2 - xy} = \dfrac{6}{5}. \end{cases}$$

Решение. Не забудем написать ОДЗ. Сделаем замены.

Пусть $\dfrac{1}{x^2 - xy} = t, \dfrac{1}{y^2 - xy} = z.$ (*)

Тогда получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5t + 4z = -\dfrac{1}{6}, \\ 7t - 3z = \dfrac{6}{5}. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, а второе на 4 и сложим почленно:

$$15t + 28t = -\frac{1}{2} + \frac{24}{5}, 43t = \frac{43}{10}, \text{ т.е. } t = \frac{1}{10}.$$

А теперь избавимся в системе от t,

$$\begin{cases} 5t + 4z = -\dfrac{1}{6}, \\ 7t - 3z = \dfrac{6}{5}, \end{cases}$$

умножим первое уравнение на 7, второе на 5 и вычтем почленно, получим $28z + 15z = -\dfrac{7}{6} - 6,$ т.е. $43z = -\dfrac{43}{6}, z = -\dfrac{1}{6}$. Подставляем t и z *в* равенства (*):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - xy} = \dfrac{1}{10}, \\ \dfrac{1}{y^2 - xy} = -\dfrac{1}{6}, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x^2 - xy = 10, \\ y^2 - xy = -6. \end{cases}$$

Сложим почленно уравнения системы: $(x-y)^2 = 4$, т.е. $|x-y| = 2$. Последняя система распадается на две:

$$\begin{cases} x(x-y) = 10, \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x(x-y) = 10, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

Решая их, находим $x_1 = 5, y_1 = 3$ и $x_2 = -5, y_2 = -3$. Проверкой убеждаемся, что найденные значения *x* и *y* являются решением системы.

Ответ: (5,3), (-5,-3).

IV Система, сводящаяся к системе, содержащее одно однородное уравнение.

Пример 28. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

Решение. Следует заметить, что левые части уравнение системы – *однородные многочлены* одной и той же степени. Исключим из системы свободные члены! Умножим обе части первого уравнения на 2 и вычтем почленно второе уравнение

$$-\begin{cases} 4x^2 - 6xy + 2y^2 = 6, \\ \underline{x^2 + 2xy - 2y^2 = 6,} \end{cases}$$

$$3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0,$$

получаем однородное уравнение. Далее ясно, при $x \neq 0$:

$$3 - 8 \cdot \frac{y}{x} + 4 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0, \text{ т.е.}$$

$$4t^2 - 8t + 3 = 0, \text{ где } \frac{y}{x} = t,$$

$$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Получаем $\dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}$, т.е. $y = \dfrac{3}{2}x$ и $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $y = \dfrac{1}{2}x$.

Решаем две системы.

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$x^2+3x^2-\frac{9}{2}x^2=6,$$
$$-x^2=12,$$
$$x\in\varnothing.$$

$$\mathrm{x}\ \ +x^2-\frac{x^2}{2}=6,$$
$$3x^2=12, x^2=4,$$
$$x_1=-2\Rightarrow y_1=-1,$$
$$x_2=2\Rightarrow y_2=1.$$

Сделав проверку, запишем ответ.

Ответ: (-2,-1), (2,1).

Задачи для самостоятельного решения

Решить системы уравнений.

1). $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{xy}=2,\\[2mm] \dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{x-2y}{xy}=4.\end{cases}$

2). $\begin{cases}\dfrac{1}{2x-3y}+\dfrac{2}{3x-2y}=\dfrac{3}{4},\\[2mm] \dfrac{3}{2x-3y}+\dfrac{4}{3x-2y}=1.\end{cases}$

3). $\begin{cases}(x^2+y^2-xy)(x-y)=1+y^3\\ (x^2+y^2+xy)(x+y)=1-y^3\end{cases}$

4). $\begin{cases}2xy+y^2-4x-3y+2=0,\\ xy+3y^2-2x-14y+11=0.\end{cases}$

5). $\begin{cases}10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0,\\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0.\end{cases}$

6). $\begin{cases}x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0,\\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0.\end{cases}$

7). $\begin{cases}x=y^3-3y,\\ y=x^3-3x.\end{cases}$

8). $\begin{cases}xy+3y^2-x+4y=7,\\ 2xy+y^2-2x-2y=-1.\end{cases}$

$$9).\begin{cases} x = \dfrac{2yz}{y^2+z^2}, \\ y = \dfrac{2xz}{x^2+z^2}, \\ z = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

$$10).\begin{cases} x+y = \dfrac{5xy}{1+xy}, \\ y+z = \dfrac{2yz}{1+yz}, \\ z+x = \dfrac{7zx}{1+zx}. \end{cases}$$

4. Основные методы решения неравенств

В отличие от уравнений в неравенствах невозможна проверка (в обычном смысле) найденных решений. Вследствие этого схема решения, часто применявшаяся при решении уравнений, заключающаяся в получении последовательности уравнений-следствий с последующим отбором корней, при решении неравенств не работает.

Тем не менее, многие приемы и методы решения неравенств совпадают с приемами решений уравнений (преобразование, разложение на множители, замена неизвестного). Более того, исходя из идей метода интервалов, решение любого неравенства (во всяком случае, тех, которые встречаются в школьной практике и на ЕГЭ) можно свести к решению одного или нескольких неравенств.

Эти методы зависят в основном от того, к какому классу относятся функции, составляющие неравенство.

I Квадратные неравенства, т.е. неравенства вида

$ax^2+bx+c>0\ (<0),\ a\neq 0.$

Будем считать, что $a>0$. Если это не так, то, умножив обе части неравенства на -1 и изменив знак неравенства на противоположный, получаем желаемое.

Чтобы решить неравенство, можно:

1. Квадратный трехчлен разложить на множители, т.е. неравенство записать в виде $a(x-x_1)(x-x_2)>0\ \ (<0)$;

2. Корни многочлена нанести на числовую ось;

3. Построить «змейку», проходящую через корни.

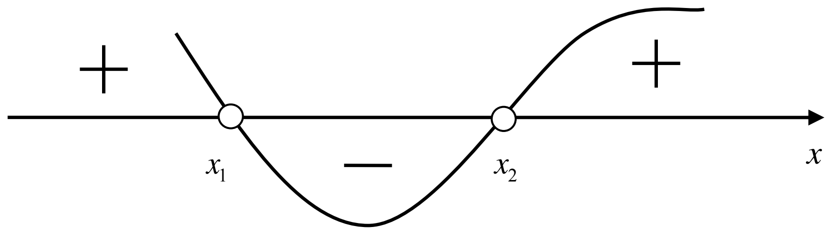


Рисунок 4

Если квадратный трехчлен не имеет корней, то при $a>0$ (и $D<0$) квадратный трехчлен при любом x положителен.

II. Алгебраические неравенства высших степеней ($n>2$), т.е. неравенства вида

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 > 0\,(<0),\quad n>2.$$

С помощью методов решения рациональных уравнений многочлен степени $n>2$ разложить на множители, т.е. неравенство записать в виде

$$a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdot \ldots \cdot (x-x_n) > 0\ (<0).$$

При этом следует сокращать на заведомо положительные выражения или отрицательные (в последнем случае знак неравенства менять на противоположный). Затем по правилу «змейки» найти решение.

Пример 29. Решить неравенство

$$(2x+1)^4(2-x)(x-1)^4(x-3)^7(3x-2)<0.$$

Решение. Обозначим левую часть неравенства *P(x).* Отметим на числовой оси точки, в которых многочлен обращается в нуль, (см. рис. 1.3).

Определим знаки *P(x)* на каждом промежутке. Для этого найдем, для начала, знак *P(x)* на каком-либо одном промежутке. Например, удобно взять

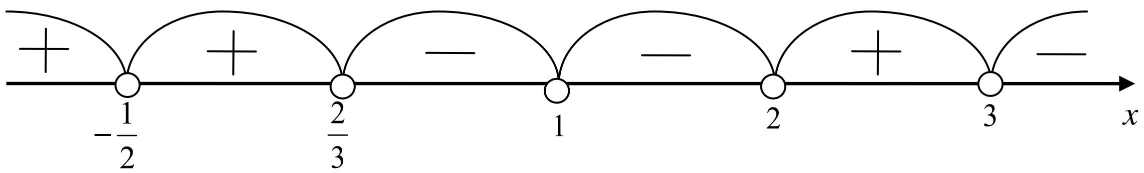


Рисунок 5

Ответ: $\left(\frac{2}{3};1\right)\cup\left(1;2\right)\cup(3;+\infty)$.

Пример 30. Решить неравенство $\frac{2}{x+2}+\frac{2}{3x-1}\ge\frac{3}{2x-3}$.

Решение. При решении этого неравенства грубой ошибкой было бы освобождение от знаменателя (с сохранением знака неравенства). стандартный путь: перенесем все в одну часть (левую), приведем к общему знаменателю. а затем разложим на множители числитель. Получим

$$\frac{x(x-5)}{(x+2)(3x-1)(2x-3)}\ge 0.$$

Получившееся неравенство решается методом интервалов.

Ответ. $-2 < x \le 0; \frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}; x \ge 5.$

Пример 31. Решить неравенство

$$\frac{(2x-1)^3(-2x^2+3x-2)(x^2-6x+9)}{(x^3-1)(x-2)^6(x^2+3x+2)} \ge 0.$$

Решение. Запишем эквивалентное неравенство

$$\frac{(x-\frac{1}{2})^3(2x^2-3x+2)(x-3)^2}{(x-1)(x^2+x+1)(x-2)^6(x+1)(x+2)} \le 0.$$

Квадратные трехчлены $2x^2-3x+2$ и x^2+x+1 имеют отрицательные дискриминанты: $D_1=-7, D_2=-3$ и сохраняют знак "+" на всей числовой оси; на них можно сократить. Множитель $\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$ заменяем на $x-\frac{1}{2}$. Множитель числителя $(x-3)^2$ заменяем равенством $x=3$, а множитель знаменателя $(x-2)^6$ - неравенством $x \ne 2.$ Приходим к эквивалентной совокупности ограничений:

$$\left[\begin{array}{l} (x-\frac{1}{2})(x-1)(x+1)(x+2) < 0 \\ x=\frac{1}{2} \\ x=3 \\ x \ne 2 \end{array}\right.$$

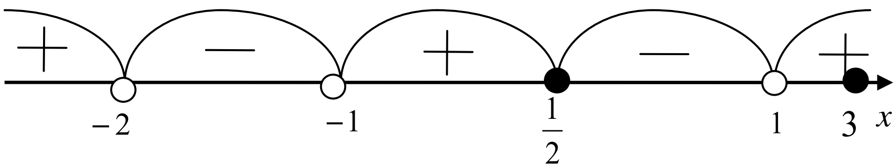


Рисунок 6

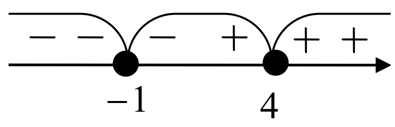
Ответ: $(-2,-1) \cup [\frac{1}{2},1) \cup \{3\}$.

II. Рациональные неравенства с модулем

Решение неравенств, содержащих модули, в большинстве случаев строится аналогично решению соответствующих уравнений. Основное отличие состоит в том, что после освобождения от модулей требуется решить, естественно, не уравнение, а неравенство. Есть и еще одно отличие. Если при решении уравнений можно широко пользоваться проверкой полученных решений, то для случаев неравенств отбросить посторонние решения проверкой может быть затруднительно. Это означает, что при решении неравенств стараются использовать, в основном, равносильные переходы.

Пример 32. Решить неравенство $|x-4|+|x+1|<7$

Решение. Нули подмодульных выражений разделяют числовую ось на три промежутка $x<-1, -1\le x<4, x\ge 4$.



На левом промежутке оба модуля раскрываются со знаками «-»; на среднем – первый модуль раскрывается со знаком «-», а второй – со знаком «+»; на правом – оба раскрываются со знаком «+».

Рисунок 7

В результате получаем, что исходное неравенство равносильно совокупности трех систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-1, \\ -x-1-x+4<7, \end{cases} \\ \begin{cases} -1\le x<4, \\ x+1-x+4<7, \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 4, \\ x+1+x-4<7. \end{cases}\end{array}\right.$$

Решите эти системы самостоятельно и объедините полученные ответы:

$x\in(-2;-1)\bigcup[-1;4)\bigcup[4;5)\Leftrightarrow x\in(-2;5).$

Ответ: $x\in(-2;5)$.

Неравенство вида $|f(x)|\le g(x)$ *можно решать, исходя из определения модуля, но во многих случаях удобнее перейти к системе неравенств*

$$|f(x)|\le g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\le g(x), \\ f(x)\ge -g(x) \end{cases}.$$

Пример 33. Решить неравенство

$|x^2-2x|\le x-1.$

Решение. В соответствии с приведенной схемой запишем систему неравенств, равносильную исходному неравенству:

$$\begin{cases} x^2-2x\le x-1, \\ x^2-2x\ge -(x-1). \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-3x+1\le 0, \\ x^2-x-1\ge 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является отрезок

$$x\in\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right],$$

а решением второго – объединение двух лучей

$$x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$$

Пересечение полученных множеств решений неравенств является решением системы и служит ответом в данной задаче.

Ответ: $x \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Неравенство вида $|f(x)| \ge g(x)$ удобнее решать, переходя к совокупности неравенств

$$|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x) \end{array}\right. .$$

Пример 34. Решить неравенство

$2|x^2-1| > x+1.$

Решение. Запишем совокупность неравенств, равносильную исходному неравенству:

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2-2 > x+1, \\ 2x^2-2 < -(x+1). \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-x-3 > 0, \\ 2x^2+x-1 < 0. \end{array}\right.$$

Решением первого неравенства является объединение лучей $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, а решением второго – интервал $x \in (-1; \frac{1}{2})$.

Объединяя полученные множества решений неравенств, находим решение совокупности.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства.

1. $(5x-1)(2-3x)(x+3) > 0.$
2. $x^3+5x^2+3x-9 \le 0.$
3. $(x-3)(x-1)^2(3x-6-x^2) < 0.$
4. $(x^2-x)^2+3(x^2-x)+2 \ge 0.$
5. $x^4-x^3-10x^2+2x+4 < 0.$
6. $\dfrac{(3-x)(2x+1)}{(x-2)(x+1)} < 0.$
7. $\dfrac{x+1}{x-2} > \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{2}.$
8. $x + \dfrac{6}{x} < 7.$

9. $\dfrac{(8-x^3)(x^3-27)}{(8+x^3)(x^3+27)} > 0.$

10. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-x+1} \le \dfrac{1-2x}{x^3+1}.$

11. $\left|3-|x-2|\right| \le 1.$

12. $\left|x^2-4|x|+3\right| < 2.$

13. $\left|x^2-2x-3\right| < 3x-3.$

14. $|x+2|-|x-1| < x-\dfrac{3}{2}.$

15. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{|x|+1} \ge \dfrac{1}{|x|-1}.$

Глава 2. Логарифмические уравнения и неравенства

1. Логарифмы и их свойства, логарифмическая функция

Для того чтобы ввести определение логарифма некоторого числа, рассмотрим показательное уравнение $a^x = b$, при $a > 0$ *и* $a \neq 1$. При $b \le 0$ это уравнение не имеет решений и при $b > 0$ имеет единственное решение, которое мы назовем логарифмом b по основанию a и обозначим $log_a b$.

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую необходимо возвести число a, чтобы получилось число b:

$$a^{log_a b} = b.$$

Данное равенство называется основным *логарифмическим тождеством*.

Разберем свойства логарифмов. При основании $a > 0$ *и* $a \neq 1, x > 0$, $y > 0$ и действительных значениях p и k верны равенства:

1. $log_a 1 = 0$*;*

2. $log_a a = 1$*;*

3. $log_a xy = log_a x + log_a y$*;*

4. $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$*;*

5. $log_a x^p = p log_a x$*,* $log_{a^k} b = \frac{1}{k} log_a b$*;*

6. $log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$*, формула перехода к новому основанию;*

7. $c^{log_a b} = b^{log_a c}$.

Логарифм, основанием которого является число 10, называется десятичным логарифмом и обозначается как $lga = log_{10} a$**.** Логарифм, основанием которого является число $\boldsymbol{e}$, называется натуральным логарифмом и обозначается $lna = log_e a$.

Функция вида $y = log_a x$, где число $a > 0$ *и* $a \neq 1$, называется логарифмической функцией с основанием a. Рассмотрим основные свойства логарифмической функции:

1. Область определения логарифмической функции — это множество положительных вещественных чисел $\mathbb{R}+$.

2. Область значения логарифмической функции – множество вещественных чисел $\mathbb{R}$.

3. Если основание логарифмической функции $a > 1$, то функция возрастает на всей области определения. Если же основание $0 < a < 1$, то логарифмическая функция убывает на всей области определения.

4. График логарифмической функции всегда проходит через точку с координатами (1;0).

5. Возрастающая логарифмическая функция положительна при $x > 1$ и отрицательна при $0 < x < 1$.

6. Убывающая логарифмическая функция отрицательна при $x > 1$ и положительна при $0 < x < 1$.

График возрастающей логарифмической функции ($a > 1$) (рисунок 8):

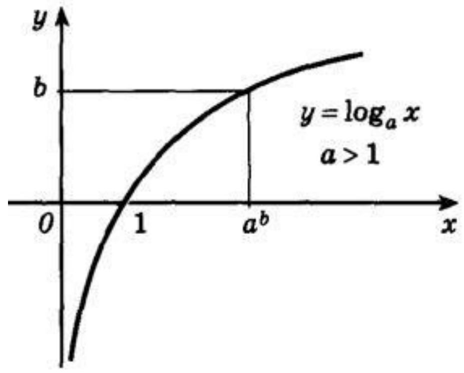


Рисунок 8

График убывающей логарифмической функции ($0 < a < 1$) (рисунок 9):

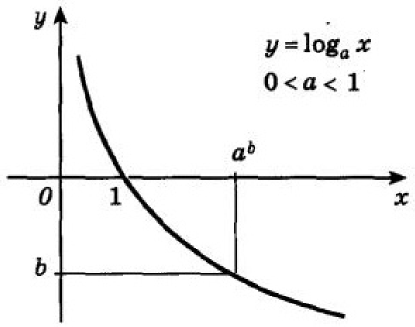


Рисунок 9

7. Логарифмическая функция не является четной или нечетной (функция общего вида).

8. У функции нет точек экстремума (максимума и минимума).

Графики показательной и логарифмической функций с одинаковыми основаниями симметричны относительно прямой $y = x$ (Рисунок 3).

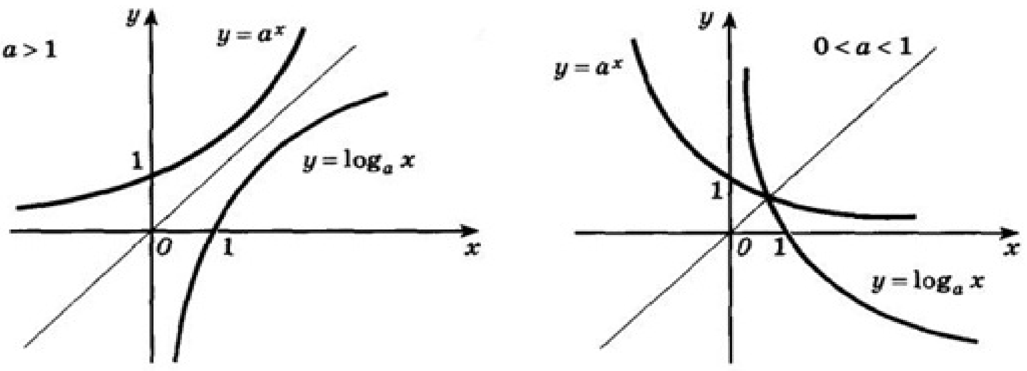


Рисунок 10

2. Логарифмические уравнения и неравенства

Логарифмическим уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании.
Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида:

$log_a x = b$. Тогда $x = a^b$.

Логарифмическим неравенством называется неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании.

При решении логарифмических уравнений применяются различные методы, выбор которых зависит от вида уравнения. Перечислим основные из них:

1. *Использование определения логарифма.*
2. *Потенцирование (переход от логарифма данного выражения к самому этому выражению).*
3. *Приведение к одному основанию.*
4. *Введение новой переменной.*
5. *Логарифмирование обеих частей уравнения.*
6. *Функционально-графический метод.*

Рассмотрим основные виды логарифмических уравнений:

1) Простейшие уравнения: $log_a x = b$; $log_a f(x) = b$; $log_x a = b$.

Решение простейшего логарифмического уравнения $log_a x = b$, где число $a>0$, $a\neq 1$, при $x>0$ найдем по определению логарифма: $x=ab$ - единственный корень уравнения.

Для уравнения вида $log_a f(x) = b,\ a > 0, a \neq 1$ при $f(x) > 0$ получаем равносильное уравнение $f(x) = a^b$.

К простейшим также относится уравнение вида $log_x a = b, a > 0$, которое имеет смысл только при $x > 0, x \neq 1$:

а) при $a \neq 1$ и $b \neq 0$ имеет единственный корень $x = a$;

б) при $a = 1$ и $b = 0$ имеет решение любое положительное, отличное от единицы, число;

в) при $a = 1$ и $b \neq 0$ корней не имеет;

г) при $a \neq 1$ и $b = 0$ корней не имеет.

2) Сведение логарифмических уравнений к простейшим.

Уравнение вида $log_a f(x) = log_a g(x)$, а > 0, $a \neq 1$ можно заменить равносильной системой двумя способами:

$$log_a f(x) = log_a g(x), \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

$$log_a f(x) = log_a g(x), \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Аналогично уравнение вида $log_{f(x)} a = log_{g(x)} a$, $a > 0$ можно заменить равносильной ему системой двумя способами:

$$log_{f(x)} a = log_{g(x)} a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

$$log_{f(x)} a = log_{g(x)} a \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Заметим, что выбор способа замены определяется тем, какое из неравенств $g(x) > 0$ или $f(x) > 0$ – решается проще.

3) Уравнение вида $log_{g(x)} f(x) = b$ равносильно смешанной системе:
$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = \left(g(x)\right)^b. \end{cases}$$

4) Уравнения вида

$log_{f(x)} g(x) = log_{f(x)} h(x)$, $log_{g(x)} f(x) = log_{p(x)} f(x)$.

Первое уравнение $log_{f(x)} g(x) = log_{f(x)} h(x)$ можно заменить равносильной системой двумя способами:

$$log_{f(x)} g(x) = log_{f(x)} h(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ g(x)=h(x), \end{cases}$$

или

$$log_{f(x)} g(x) = log_{f(x)} h(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} h(x)>0, \\ f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ g(x)=h(x). \end{cases}$$

Второе уравнение $log_{g(x)} f(x) = log_{p(x)} f(x)$ можно заменить равносильной системой двумя способами:

$$log_{g(x)} f(x) = log_{p(x)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ g(x)\neq 1, \\ g(x)=p(x). \end{cases}$$

$$log_{g(x)} f(x) = log_{p(x)} f(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x)>0, \\ p(x)>0, \\ p(x)\neq 1, \\ g(x)=p(x). \end{cases}$$

4) Уравнение вида $log_{\varphi(x)} f(x) = log_{\psi(x)} g(x)$.

При решении таких уравнений надо учитывать, что их ОДЗ определяется из условий:

а) на ОДЗ все функции $f(x),\; g(x),\; \varphi(x),\; \psi(x)$ имеют смысл;

б) на ОДЗ основание логарифмов, т.е. функции $\psi(x)$и $\varphi(x)$ должны удовлетворять условиям: $\psi(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) \neq 1$, $\varphi(x) \neq 1$;

в) на ОДЗ функции, находящиеся под знаком логарифма должны быть положительными, т. е. на ОДЗ должны выполняться неравенства $f(x)>0$, $g(x)>0$.

5) Уравнение вида $log_{\alpha(x)}(log_{\beta(x)} f(x)) = 0$ равносильно системе:

$$\begin{cases} \alpha(x) > 0, \\ \alpha(x) \neq 1, \\ log_{\beta(x)} f(x) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(x) > 0, \\ \alpha(x)\neq 1, \\ \beta(x)>0, \\ \beta(x)\neq 1, \\ \beta(x)=f(x). \end{cases}$$

При решении *логарифмических неравенств* используются следующие утверждения относительно равносильности неравенств и учитываются *свойства монотонности* логарифмической функции.

1) Если основание $a > 1$, то неравенство $log_a f(x) > log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2) Если основание $0 < a < 1$, то неравенство $log_a f(x) > log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

3)Неравенство $log_{a(x)} f(x) > log_{a(x)} g(x)$ равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Или, используя метод рационализации:

неравенство $log_{a(x)} f(x) > log_{a(x)} g(x)$ равносильно системе рациональных неравенств

$$\begin{cases} (a(x)-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0, \\ f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ a(x)>0. \end{cases}$$

Причем условие $a(x) \neq 1$ учитывается в первом неравенстве.

Рассмотрим применение приведенных методов в решении примеров.

Пример 1. Используя определение логарифма, решить уравнения:

а) $log_2(x-7)=3$,

б) $lg\frac{2x+6}{x-1}=1$,

в) $log_{\ x+3}9=2$.

Решение: а) $log_2(x-7)=3$, при $x>7$

$x-7=2^3$,

$x=15$.

Проверка: $log_2(15-7)=3$, $3=3 \Rightarrow 15$ является решением.

Ответ: 15.

б) $lg\frac{2x+6}{x-1}=1$,

значение под знаком логарифма $\frac{2x+6}{x-1}>0$ при $x \in (-\infty,-3),(1,+\infty)$.

$\frac{2x+6}{x-1}=10^1$,

$2x+6=10x-10$,

$8x=16$,

$x=2$.

Сделав проверку, убеждаемся в том, что $x=2$ наше решение.

Ответ: 2.

в) $log_{x+3}9=2$, учитывая ОДЗ, видим, что основание $x>-3$, $x \neq -2$.

$(x+3)^2=9$,

$x^2+6x+9=9$,

$x(x+6)=0$,

$x_1=0\ , x_2=-6$.

Второй корень не удовлетворяет ОДЗ. После проверки остается только корень $x=0$.

Ответ: 0.

Потенцирование (переход от логарифма данного выражения к самому этому выражению).

Пример 2. Решить уравнения:

а) $log_{\ 3}(x+1)+log_3(x+3)=log_3 3$,

б) $lg(x^2+2x-7)-lg(x-1)=0$.

Решение: а) $log_{\ 3}(x+1)+log_3(x+3)=log_3 3$,

ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1,+\infty)$.

Используя свойство логарифмов, получаем:

$log\ _3(x+1)(x+3) = log_3 3,$
$(x+1)(x+3) = 3,$
$x^2\ +4x = 0,$
$x_1 = 0\ , x_2 = -4.$

Учитывая ОДЗ, получаем решение $x = 0$. Ответ: 0.

б) $lg(x^2+2x-7) - lg(x-1) = 0,$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+2x-7>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1+2\sqrt{2}, +\infty),$

$lg(x^2+2x-7) = lg(x-1),$
$x^2+2x-7 = x-1,$
$x^2+x-6 = 0,$
$x_1 = -3\ , x_2 = 2.$

С учетом ОДЗ получаем $x = 2$.

Ответ: 2.

Приведение к одному основанию.

Пример 3. Решить уравнение $log\ _{25}x + log_5 x = log_{0,2}\sqrt{8}$.

Решение: ОДЗ: $x > 0$. Перейдем к основанию 5.

$log\ _{5^2}x + log_5 x = log_{5^{-1}}\sqrt{8},$
$\frac{1}{2}log\ _5 x + log_5 x = -log_5 2^{\frac{3}{2}},$
$\frac{3}{2}log\ _5 x = -log_5 2^{\frac{3}{2}},$
$\frac{3}{2}log\ _5 x = -\frac{3}{2}log_5 2,$
$log\ _5 x = log_5 \frac{1}{2}.$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Введение новой переменной.

Пример 4. Решить уравнение $log^2\ _5 x + log_5 x = 2$.

Решение: ОДЗ*:* $x > 0$. Введем новую переменную $y = log_5 x$, получим квадратное уравнение y^2 *-y -2=0*.Оно имеет корни y_1*=-1,* y_2*=2*. Вернувшись к обратной замене, решим два простейших логарифмических уравнения:

$log_5 x = -1,\ x = 5^{-1} = \frac{1}{5}\ ,$
$log_5 x = -2,\ x = 5^2 = 25.$

Оба корня входят в ОДЗ.

Ответ: $x=\frac{1}{5}$, *x=25.*

Логарифмирование обеих частей уравнения.

Пример 5. Решить уравнение $3^{log_2 x} + x^{log_2 3} = 6.$

Решение. ОДЗ: x$\in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Тогда преобразуем первое слагаемое

$3^{log_2 x} = 3^{\frac{log_3 x}{log_3 2}} = (3^{log_3 x})^{\frac{1}{log_3 2}} = x^{log_2 3}.$

Из полученного выражения следует, что наше уравнение примет вид:

$2x^{log_2 3} = 6,$

$x^{log_2 3} = 3.$

Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 2, получим:

$log\ _2 x^{log_2 3} = log_2 3,$

$log_2 3 \cdot log_2 x = log_2 3,$

$log_2 x = 1,$

$x = 2\ .$

Полученный корень входит в ОДЗ.

Ответ: 2.

Функционально-графический метод.

Суть этого метода состоит в использовании свойств функций. Если одна из функций $y = f(x)$ возрастает, а другая $y = g(x)$ убывает на некотором промежутке X, то уравнение $f(x)= g(x)$ имеет не более одного корня на промежутке X.

Если невозможно решить уравнение, используя свойства, тогда используют графические иллюстрации функций. Нарисуем графики функции в одной системе координат и найдем точки пересечения. Координата x этих точек и будет решением уравнения.

Пример 6. Решить уравнение: $\log_2(3x - 5) = 8 - 2x$.

Решение. ОДЗ: $x > \frac{5}{3}$. Построим в одной системе координат графики функций: $y = log_2(3x - 5)$ и $y = 8 - 2x$.

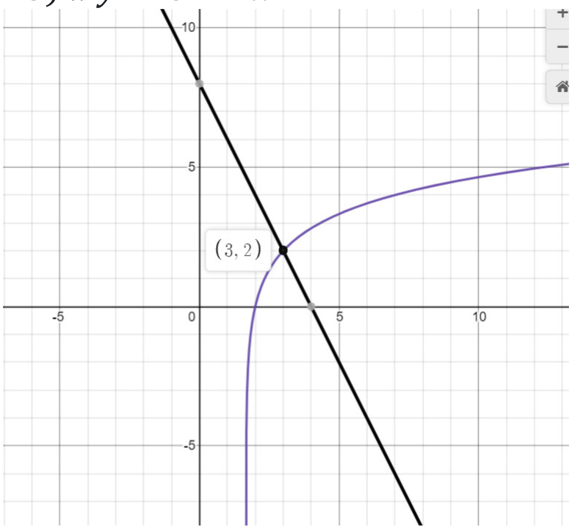


Рисунок 11

Графики пересекаются в точке $(3; 2)$ (рис.1) абсцисса этой точки будет корнем уравнения.

Ответ: $x = 3$.

Рассмотрим применение приведенных выше утверждений при решении логарифмических неравенств.

Пример 7. Решить неравенство: $lg(2x - 3) > l\,g(x + 1)$.

Решение. Согласно первому утверждению оно равносильно системе:

$$\begin{cases} 2x - 3 > x + 1 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (4, +\infty).$$

Ответ: $x \in (4, +\infty)$.

Пример 8. Решить неравенство: $log_{0,5}(4x-7) < log_{0,5}(x+2)$.

Решение. Согласно утверждению 2 оно равносильно системе

$$\begin{cases} 4x-7 > x+2 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 9 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3, +\infty).$$

Ответ: $x \in (3, +\infty)$.

Пример 9. Решить неравенство $log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$.

Решение. Представим $1 = log_{2x}2x$. Тогда, используя утверждение 3, можем записать совокупность двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x > 1, \\ x^2-5x+6 < 2x, \\ x^2-5x+6 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2-5x+6 > 2x, \\ 2x > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая первую систему совокупности, получаем:

$$\begin{cases} 2x > 1, \\ x^2-5x+6 < 2x, \\ x^2-5x+6 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ 1 < x < 6 \\ \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 3 \end{array}\right., \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1,2) \cup (3,6).$$

Решая вторую систему совокупности, получаем:

$$\begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2-5x+6 > 2x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 6, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, \tfrac{1}{2}).$$

Тогда решение нашего неравенства примет вид: $x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (1,2) \cup (3,6)$.

Решим это неравенство другим способом, используя метод рационализации:

$log_{2x}(x^2-5x+6) < 1,$

$log_{2x}(x^2-5x+6) - log_{2x}2x < 0$.

Оно равносильно системе:

$$\begin{cases} (2x-1)(x^2-5x+6-2x) < 0, \\ 2x > 0, \\ x^2-5x+6 > 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(x-1)(x-6) < 0, \\ x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 3 \end{array}\right., \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < \frac{1}{2}, \\ 1 < x < 6, \end{array}\right. \\ x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 3. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1,2) \cup (3,6).$$

Ответ: $x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (1,2) \cup (3,6)$.

Можно заметить, что это решение намного проще. Решим этим же методом следующее неравенство.

Пример 10. Решить неравенство:

$log_{2x-1}(x^2-5x+6) < log_{2x-1}(2x-4)$.

Решение. Запишем ограничения логарифма:

$$\begin{cases} 2x-1>0, \\ 2x-1\neq 1, \\ x^2-5x+6>0, \\ 2x-4>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ x\neq 1, \\ x>2, \\ \left[\begin{array}{l} x<2, \\ x>3, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$$

Методом рационализации получим:

$(2x-1-1)(x^2-5x+6-2x+4)<0,$

$2(x-1)(x-2)(x-5)<0,$

Решением последнего неравенства является множество $x \in (-\infty, 1) \cup (2{,}5)$.

С учетом ограничений получаем решение нашего неравенства: $x \in (3{,}5)$.

Ответ: $x \in (3{,}5)$.

Пример 11. Рассмотрим еще одно неравенство: $log_{x+2}4 > log_x 2$.

Решение. Ограничения логарифма: $x>0$ *и* $x\neq 1$.

$log_2(x+2)>1>0,$ т.к. $x>0$.

$\frac{2}{log_2(x+2)} > \frac{1}{log_2 x},$

$\frac{2log_2 x - log_2(x+2)}{log_2 x} > 0,$

$\frac{log_2 x^2 - log_2(x+2)}{log_2 x - log_2 1} > 0.$

Это неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-1} > 0, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)(x+1)}{x-1} > 0, \\ x>0. \end{cases}$$

Решая все неравенства из системы, получаем решение: $x \in (0{,}1) \cup (2, +\infty)$.

Ответ: $x \in (0{,}1) \cup (2, +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения.

1. $\log_{\frac{1}{2}}(8x-4) = -2;$

2. $\log_{\frac{1}{4}}(7x-5) = -2;$

3. $\lg(3x-6) = \lg(4x-10);$

4. $\log_2^2 x \; -4\log_2 x + 3 = 0;$

5. $\log_4^2 x - \log_4 x - 2 = 0;$

6. $\log_3(2x+1) = 2;$

7. $\log_2(3x-6)=\log_2(2x-3)$;
8. $3\log^2{}_4 x-7\log_4 x-2=0$;
9. $\log_3(x^2+2x+3)=\log_3 6$;
10. $\log_2 x=2\log_2 3+\log_2 5$;
11. $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$;
12. $\log_4 2x+\log_4\sqrt{x}-1{,}5=0$.
Решить неравенства.
13. $3^{\log_3 x}\cdot 27^{\log_x 9}>x^{\log_3^2 x}$;
14. $(x^2-2x)\log_{0,1}(x+3)-\dfrac{1}{\log_{x+3}10}\geq 0$;
15. $\log_{0,6}(x+3)-\dfrac{1}{\log_{x+2}(5/3)}\geq\log_{0,6}25$;
16. $\log_3\dfrac{|x+1|}{2}<1$;
17. $36^{\log_9 x}+4x^{\log_3 6}\leq 5x^{\log_x 6}$;
18. $\dfrac{\log_{1/\sqrt{3}}\left(\dfrac{x}{5}+6\right)}{\sqrt{x+29}}\geq 0$;
19. $\log_{(3-x)^2}(x^2+2)\leq 0$;
20. $\log_{1/2}(2^x+8)-x\log_{1/2^x}(13-2^x)>x$.

Глава 3. Задачи с параметрами

1. Общий взгляд на задачи с параметром

Разберем вопрос: что такое «уравнение с параметром» и «неравенство с параметром? На уравнение вообще можно смотреть как на равенство двух буквенных выражений. Пусть этих букв будет две: x и a. Когда говорят об уравнении с параметром, то имеют в виду, что в равенстве с двумя буквами, одна из них x означает неизвестное, а вторая – параметр, который принимает переменные значения. Решить уравнение с параметром – значит найти значения неизвестного x при каждом значении параметра a. Естественно, что в записи ответа значение неизвестного x будет зависеть от a.

Неравенство с параметром может быть записано в виде $F(x, a) \geq 0$. Решить такое неравенство – это означает при каждом фиксированном значении a найти множество значений x, удовлетворяющих этому неравенству.

В задачах с параметрами очень часто возникает вопрос, при каких значениях параметра данное уравнение имеет решение (иногда с добавлением дополнительных условий на корни). Начнем разбирать данную тему с решения квадратных уравнений.

Пример 1. При каких значениях параметра a один из корней (возможно, единственный корень) уравнения $ax^2 + x + 1 = 0$ равен 1?

Указание. Подставим $x = 1$ в уравнение и получим условие $a = -2$ (которое является не только необходимо, но и достаточно).

Пример 2. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $x^2 - 9x + a = 0$ в два раза больше другого?

Указание. По теореме Виета составим систему уравнений $2x \cdot x = a$, $2x + x = 9$. Получим корни уравнения, которые будут действительными, и параметр a.

Ответ. 18.

Пример 3. При каких значениях параметра a разность большего и меньшего корней уравнения $ax^2 + 8x + 3 = 0$ равна 1?

Указание. Так как $a \neq 0$, найдем корни уравнения из условий: сумма корней $x_1 + x_2 = -\dfrac{8}{a}$ и разность $x_1 - x_2 = 1$. Подставим найденные корни в условие $x_1x_2 = \dfrac{3}{a}$, и получим возможные значения a. Выберем те, которые подходят условиям задачи.

Ответ. –16 и 4.

Пример 4. Система уравнений $\begin{cases} ax + by = 11, \\ bx + ay = 10 \end{cases}$ имеет решение $x = 2$, $y = 1$. Чему равна сумма параметров $a + b$?

Указание. Как и в первом примере, подставляем данные. Дальше решаем систему $\begin{cases} 2a+b=11, \\ 2b+a=10. \end{cases}$

Ответ. 7; 5.

Пример 5. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x+1}{x-7}=\dfrac{a-x}{x-7}$ не имеет решений?

Указание. Надо лишь позаботиться, чтобы у линейного уравнения $x + 1 = a - x$ корень был отличен от 7 (при $7 + 1 = a - 7$, т. е. при $a = 15$ получится $x = 7$).

Ответ. 15.

Пример 6. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2x - a = 0$
а) не имеет корней;
б) имеет один корень;
в) имеет два корня?

Указание. Для ответа на все пункты задания достаточно рассмотреть дискриминант $D = 1 + a$. При $D < 0$ корней нет, при $D = 0$ корень один, при $D > 0$ уравнение имеет два корня.
Мы еще вернемся к этому примеру и решим его повторно графическим методом.

Ответ. а) $(-\infty; -1)$; б) -1; в) $(-1; +\infty)$.

Пример 7. При каком наименьшем целом значении параметра a неравенство $x^2 + 4x + a + 4 > 0$ выполняется при всех x?

Решение. Неравенство вида $x^2 + px + q > 0$ выполняется при всех x, когда дискриминант квадратного трехчлена отрицателен. В нашем случае $D = 2^2 - (a + 4) = -a$. Следует $-a < 0 \Leftrightarrow a > 0$. Наименьшее целое число из полученного неравенства $a = 1$.

Ответ. 1.

Пример 8. При каких значениях параметра a уравнение
$x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 3 = 0$ имеет

а) корни разных знаков;

б) два различных положительных корня;

в) два различных отрицательных корня?

Решение. Пойдем к решению двумя внешне разными путями. Первый путь связан с использованием теоремы Виета. Поскольку для корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ выполняются равенства $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, то данное уравнение имеет корни разных знаков тогда и только тогда, когда $q < 0$ (заметим, что в этом случае дискриминант квадратного трехчлена заведомо положителен, и вопрос о существовании корней разрешается автоматически).

Для того, чтобы уравнение $x^2+px+q=0$ имело два положительных корня, необходимо, чтобы выполнялось $q > 0$ и $p < 0$. Соответственно, для двух отрицательных корней получаем условия $q > 0$, $p > 0$. Но и в том, и в другом случае, не обойтись без проверки существования корней, то есть условия $D > 0$.

В основу второго подхода положим изучение графиков функций $y = f(x) = x^2 + px + q$, удовлетворяющих условиям задачи.

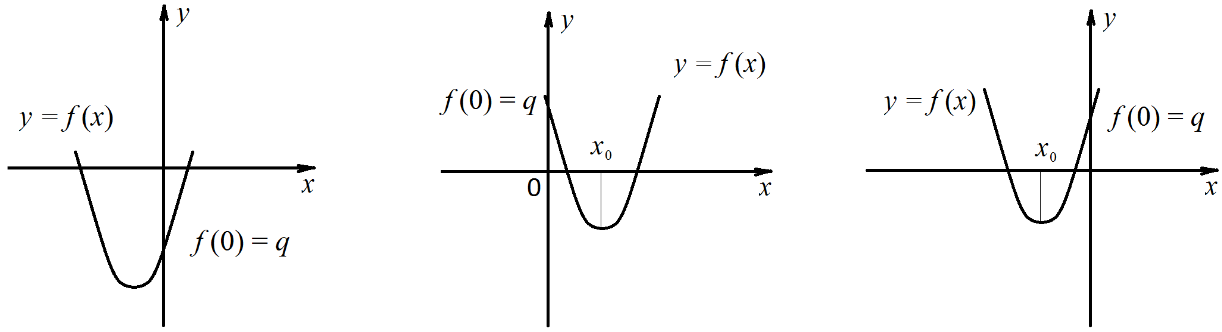


Рисунок 12

Из этих эскизов графиков получаем следующие решения нашего примера:

а) $f(0)<0 \Leftrightarrow a^2+2a-3<0 \Leftrightarrow a\in(-3;1)$.

б) $\begin{cases} x_0>0, \\ f(0)>0, \\ d>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a>0, \\ a^2+2a-3>0, \\ -2a+3>0, \end{cases}$ откуда $a\in(1;3/2)$.

в) $\begin{cases} x_0<0, \\ f(0)>0, \\ d>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a<0, \\ a^2+2a-3>0, \\ -2a+3>0, \end{cases}$ откуда $a\in(-\infty;-3)$.

Осталось только заметить, что решенные нами только что неравенства по существу совпадают с теми, которые мы выписали, обсуждая теорему Виета. Действительно, например, условия $x_0>0$ и $p < 0$ – по своей сути одно и то же неравенство, так как $x_0=-p/2$.

Ответ. а) $a\in(-3;1)$; б) $a\in(1;3/2)$; в) $a\in(-\infty;-3)$.

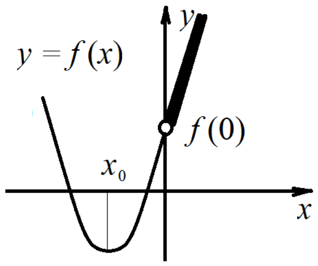
Пример 9. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 3 > 0$ выполняется при

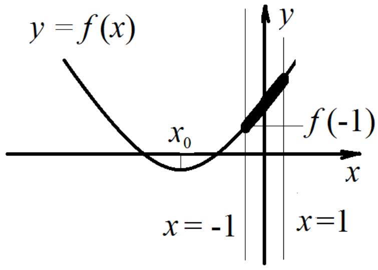
а) всех положительных x;

б) всех $x\in[-1;1]$.

Решение. Первый способ решения. Начнем с эскизов графиков функций $y = f(x) = x^2 + px + q$, удовлетворяющих условиям задачи. Впрочем, один график вполне можно и не рисовать. Если парабола $y = f(x) = x^2+px+q$ вся целиком лежит над осью абсцисс, то будут выполняться оба пункта задачи. Итак, часть решений, когда дискриминант $D = -2a + 3 < 0$, то есть $a > 3/2$, нашли.

Есть еще решения, но соответствующие им случаи менее очевидны. По крайней мере, это случаи, в которых параболы пересекают ось абсцисс:





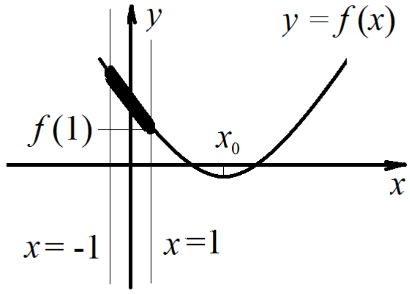


Рисунок 13

Жирным на этих эскизах выделены те части парабол, которые должны быть выше оси абсцисс при всех положительных x (левый график) и выше оси абсцисс при всех $x \in [-1; 1]$ (центральный и правый графики).

Смотрим на эти графики и выписываем системы неравенств:

а) $\begin{cases} x_0 \le 0, \\ f(0) \ge 0, \\ d \ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a \le 0, \\ a^2 + 2a - 3 \ge 0, \\ -2a + 3 \ge 0, \end{cases}$ откуда $a \in (-\infty; -3]$.

Вспомним про $a > 3/2$, и запишем ответ: $a \in (-\infty; -3] \cup (3/2; +\infty)$.

б) Для решения этого пункта придется выписывать две системы. Первая выглядит следующим образом:

$\begin{cases} x_0 < -1, \\ f(-1) > 0, \\ d \ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < -1, \\ a^2 + 4a - 2 > 0, \\ -2a + 3 \ge 0, \end{cases}$ откуда $a \in (-\infty; -2 - \sqrt{6})$.

Вторая система имеет вид $\begin{cases} x_0 > 1, \\ f(1) > 0, \\ d \ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a > 1, \\ a^2 - 2 > 0, \\ -2a + 3 \ge 0, \end{cases}$ откуда $a \in (\sqrt{2}; 3/2]$.

Окончательный ответ пункта б) выглядит так: $a \in (-\infty; -2 - \sqrt{6}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Второй способ решения. Начнем с того, что вершина параболы $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 3$ находится в точке $(a;\ 2a - 3)$.

а) Для того чтобы выполнялось условие задачи, наименьшее значение функции $y = f\ (x) = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 3$ на $[0;\ +\infty)$ должно быть неотрицательно. Наименьшее на $[0;\ +\infty)$ значение функции равно

$$y_{наим} = \begin{cases} f(0) = a^2 + 2a - 3, & \text{если}\, a < 0, \\ 2a - 3, & \text{если}\, a \ge 0. \end{cases}$$

В первом случае получается система $\begin{cases} a^2 + 2a - 3 \ge 0, \\ a < 0, \end{cases}$ откуда $a \le -3$.

Во втором случае $2a-3>0$, откуда $a>3/2$. Объединяя оба случая, получим $a\in(-\infty;\ -3]\ \cup\ (3/2;\ +\infty)$.

б) Наименьшее на отрезке $[-1;\ 1]$ значение функции равно

$$y_{наим}=\begin{cases} f(-1)=a^2+4a-2, \text{ если } a\le -1,\\ f(a)=2a-3, \text{ если } -1<a<1,\\ f(1)=a^2-2, \text{ если } a\ge 1.\end{cases}$$

Поскольку наименьшее значение должно быть положительно, получаем три системы неравенств:

$$\begin{cases} f(-1)=a^2+4a-2>0,\\ a\le -1,\end{cases}\qquad \begin{cases} 2a-3>0,\\ -1<a<1,\end{cases}\qquad \begin{cases} a^2-2>0,\\ a\ge 1.\end{cases}$$

Объединение решений этих трех систем – множество $a\in(-\infty;\ -2-\sqrt{6})\ \cup\ (\sqrt{2};\ +\infty)$.

Разберем еще один очень полезный прием. Вершина параболы $y=x^2-2ax+a^2+2a-3$ находится в точке $(a;\ 2a-3)$. Нарисуем на координатной плоскости множество, которое образуют вершины всех парабол при различных a.

Это – прямая $y=2x-3$. Напомним, что каждой точке этой прямой соответствует свое значение параметра, и из каждой точки этой прямой “выходит” парабола, соответствующая данному значению параметра.

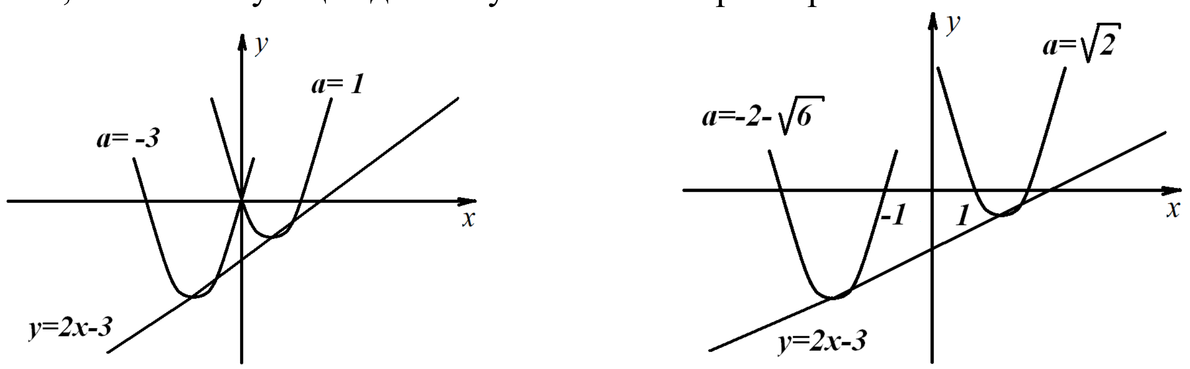


Рисунок 14

Левый рисунок объясняет все ответы пункта а), правый – пункта б).

Ответ. а) $a\in(-\infty;\ -3]\ \cup\ (3/2;\ +\infty)$; б) $a\in(-\infty;-2-\sqrt{6})\cup(\sqrt{2};+\infty)$.

Пример 10. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом $x\in(-3;-1]$ значение выражения x^4-4x^2 не равно значению выражения ax^2+3.

Решение. Это задание мы переформулируем следующим образом: найдите все значения параметра a, для которых уравнение $x^4-4x^2=ax^2+3$ не имеет решений на промежутке $(-3;-1]$. После очевидной замены $t=x^2$ мы получим еще одну переформулировку задания: при каких значения параметра a уравнение

$t^2-(4+a)\,t-3=0$ не имеет решений на промежутке $[1;\ 9)$?

График функции $y = f(t) = t^2 - (4+a)t - 3$ - парабола, ветви которой направлены вверх. Так как $f(0) = -3$, то уравнение $t^2 - (4+a)t - 3 = 0$ имеет два корня разных знаков. Положительный корень не попадает в промежуток [1; 9) тогда и только тогда, когда $f(1) > 0$ или $f(9) \le 0$. Итак, в первом случае имеем неравенство $-a - 6 > 0$, откуда $a < -6$. Во втором случае $42 - 9a \le 0$, откуда $a \ge 14/3$.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup [14/3; +\infty)$.

Данное задание настолько богато идеями его решения, что мы позже решим его еще двумя способами.

Пример 11. Найдите все значения *a*, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 12|$ меньше 1.

Решение. Корни квадратного трехчлена под модулем равны 2 и 6. Получаем выражение для $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2(a-4)x + 12, & x \notin [2; 6], \\ -x^2 + 2(a+4)x - 12, & x \in [2; 6]. \end{cases}$$

Наименьшее значение квадратичная функция может принимать либо на концах промежутка, либо (если коэффициент при x^2 положителен) в вершине параболы.

Выясним, когда вершина параболы $y = x^2 + 2(a-4)x + 12$ попадает внутрь области определения $x \notin [2; 6]$.

$-(a-4) < 2 \Leftrightarrow a > 2$; $-(a-4) > 6 \Leftrightarrow a < -2$.

Пусть $a \notin [-2; 2]$. Найдем ординату вершины: $y_{\min} = -(a-4)^2 + 12$. Условие $y_{\min} < 1$ запишется так: $(a-4)^2 > 11$.

Так как $4 - \sqrt{11} > -2$, то получаем условие на *a*: $a < -2$ или $a > 4 + \sqrt{11}$.

Пусть $a \in [-2; 2]$. Вычислим $f(2) = 4a$; $f(6) = 12a$. Таким образом, при $a \ge 0$ минимум равен $4a$, при $a \le 0$ он равен $12a$. Условие на минимум запишется так: $a < \dfrac{1}{4}$. Объединяя оба случая вместе, получаем ответ примера.

Ответ. $a < \dfrac{1}{4}$ или $a > 4 + \sqrt{11}$.

2. Графические методы решения задач с параметрами

Сначала рассмотрим координатную плоскость $(x; a)$. Наглядно этот метод может быть продемонстрирован на рассмотренном выше примере 6, в котором требовалось определить в зависимости от значения параметра *a* число корней уравнения $x^2 - 2x - a = 0$. Данное уравнение есть уравнение параболы $a = -x^2 + 2x$. Нарисовав кривую, мы можем исследовать различные вопросы о корнях уравнения с параметром.

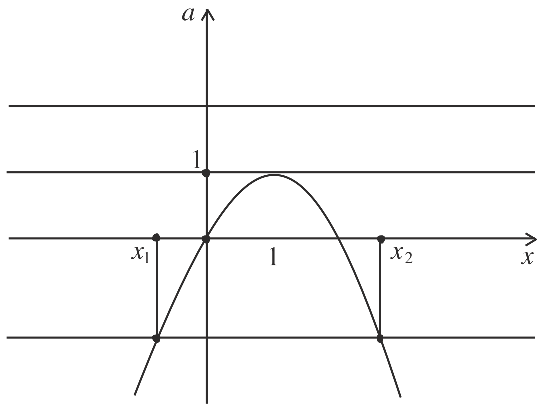


Рисунок 15

Фиксируя значение a (геометрически, проводя прямую $a = const$, параллельную оси x), мы найдем корни уравнения как абсциссы точек пересечения графика с прямой a = const.

Пример 12. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\left|0{,}5x^2 - x - 4\right| = a - 0{,}5x^2 - x$ не имеет решений.

Решение. Запишем уравнение в виде $a = 0{,}5x^2 + x + \left|0{,}5x^2 - x - 4\right|$. Если $0{,}5x^2 + x - 4 \ge 0$, то есть $x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$, то $a = x^2 - 4$. Если $0{,}5x^2 + x - 4 < 0$, то есть $x \in (-2; 4)$, то $a = 2x + 4$. Построим график функции

$$a = f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \textit{если } x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty), \\ 2x + 4, \textit{если } x \in (-2; 4). \end{cases}$$

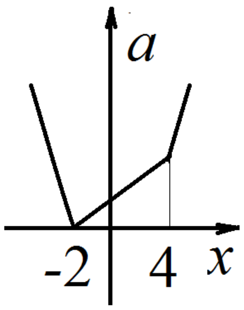


Рисунок 16

Видно, что данное уравнение не имеет решений при $a < 0$.

Ответ: $a < 0$.

Заметим, что при решении задачи можно было отказаться от построения графика функции a=f(x). Было вполне достаточно найти множество значений этой функции.

Пример 13. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом $x \in (-3; -1]$ значение выражения $x^4 - 4x^2$ не равно значению выражения $ax^2 + 3$.

Решение. Мы уже решали этот пример. Еще раз переформулируем это задание: найдите все значения параметра a, для которых уравнение $x^4 - 4x^2 = ax^2 + 3$ не имеет решений на промежутке (–3; –1].

Поскольку $x \neq 0$ на исследуемом промежутке, то перепишем уравнение в виде $a = f(x) = x^2 - 4 - \dfrac{3}{x^2}$. Найдем множество значений этой функции на промежутке (–3; –1]. Так как производная функции $a' = 2x + \dfrac{6}{x^3} < 0$ при отрицательных *x*, то на промежутке (–3; –1] исследуемая функция монотонно убывает. Так как $f(-3)=14/3$ и $f(-1)=-6$, то множеством значений функции $a=f(x)$ на (–3; –1] является промежуток [-6; 14/3). Следовательно исходное уравнение не имеет решений при $a \in (-\infty; -6) \cup [14/3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup [14/3; +\infty)$.

Пример 14. При каких значениях параметра *a* неравенство $ax^2 + 4x + a - 3 > 0$ выполняется при

а) всех *x*;

б) всех положительных *x*.

Решение. Уравнение $ax^2 + 4x + a - 3 = 0$ задает некоторую кривую на плоскости (*x; a*), которая разбивает эту плоскость на области, в каждой из которых левая часть сохраняет постоянный знак.

Выразим параметр *a* через *x*: $a(x^2 + 1) = -4x + 3$, $a = \dfrac{-4x+3}{x^2+1}$.

Такая кривая достаточно стандартна. Так как знаменатель не обращается в нуль, то это будет непрерывная кривая, имеющая горизонтальную асимптоту $a = 0$. Найти экстремумы этой кривой можно двумя способами – либо с помощью производной, либо с помощью исследования дискриминанта квадратного трехчлена. Воспользуемся первым способом: $a' = \dfrac{-4(x^2+1) + 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2}$.

$$a' = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

$$a_1 = -\frac{1}{2};\ a_2 = 2.\ a\left(-\frac{1}{2}\right) = 4;\ a(2) = -1;\ a(0) = 3;\ a\left(\frac{3}{4}\right) = 0.$$

Этих данных достаточно, чтобы начертить эскиз графика:

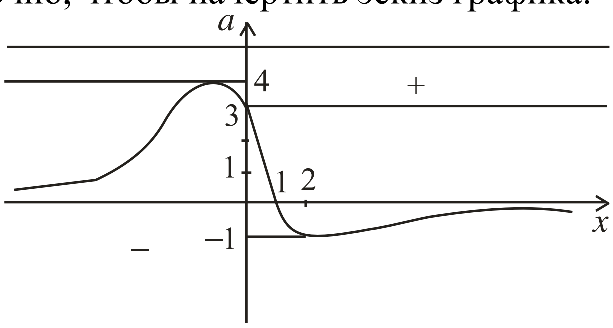


Рисунок 17

Теперь по графику легко ответить на поставленные вопросы.

Ответы: а) $a > 4$; б) $a > 3$.

Пример 15. При каждом значении параметра a решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - a - 1 \le 0, \\ x^2 + a - 3 \le 0. \end{cases}$$

Решение. Перепишем неравенства в виде $a \ge x^2 - 1$ и $a \le -x^2 + 3$. Построим координатную плоскость переменных x и a и изобразим полученные множества на левом рисунке.

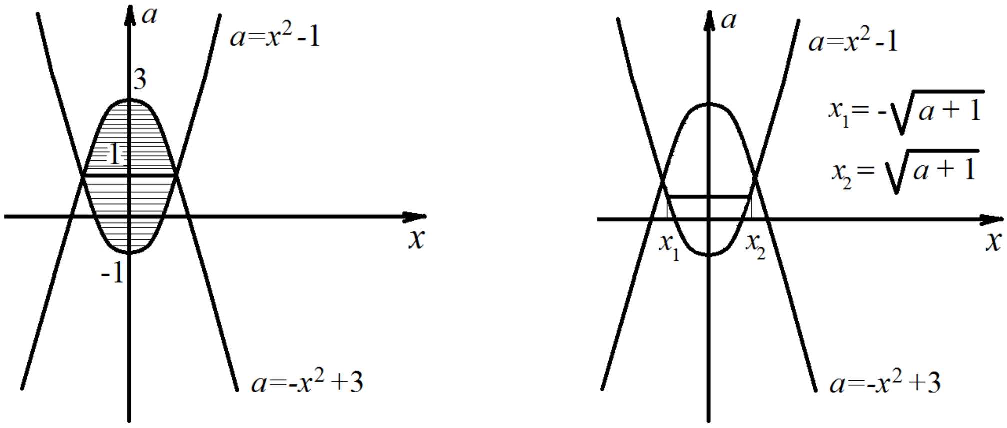


Рисунок 18

Смотрим на правый рисунок и выписываем ответ.

Ответ: решений нет при $a < -1$ и $a > 3$; $x \in [-\sqrt{a+1};\ \sqrt{a+1}]$ при $a \in [-1;1]$; $x \in [-\sqrt{3-a};\ \sqrt{3-a}\,]$ при $a \in (1;\ 3]$.

В некоторых примерах целесообразнее рассмотреть координатную плоскость ($x;\ y$). Рассмотрим такие примеры.

Пример 16. При каких значениях a уравнение $\sqrt{1-x^2} = a - x$ имеет хотя бы одно решение?

Решение. Рассмотрим графики функций $y = \sqrt{1-x^2}$ (– это верхняя полуокружность с центром в начале координат и радиусом 1) и $y = a - x$ (– это семейство прямых).

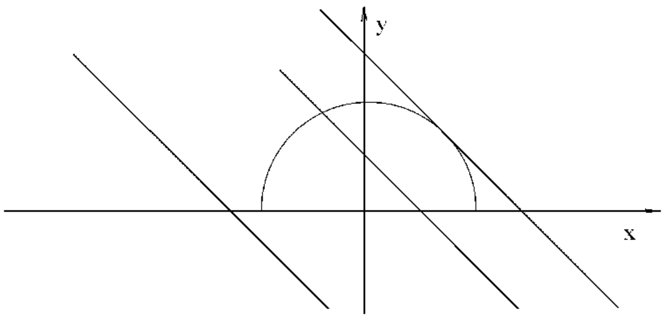


Рисунок 19

Из всех прямых нас интересуют те, которые имеют хоть одну общую точку с полуокружностью. «Самая левая» из таких прямых проходит через точку с координатами (–1; 0), поэтому для нее $a = -1$.

«Самая правая» прямая касается полуокружности. Ее можно найти из условия, что уравнение $\sqrt{1-x^2}=a-x$ для данной прямой имеет единственное решение. Возведя обе части равенства в квадрат, получим квадратное уравнение $1-x^2=x^2-2ax+a^2$, или $2x^2-2ax+a^2-1=0$, для которого дискриминант $D=a^2-2a^2+2=0$. Отсюда $a=\pm\sqrt{2}$. Из рисунка видно, что $a=\sqrt{2}$.

При $a\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$ уравнение имеет хотя бы одно решение, при других a решений нет.

Ответ: $\left[-1;\sqrt{2}\right]$.

Пример 17. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} y=\sqrt{1-x^2}, \\ \left(x-a^2\right)^2+\left(y-a^2\right)^2=1 \end{cases}$$ имеет хотя бы одно решение?

Решение. Графиком функции $y=\sqrt{1-x^2}$ является верхняя полуокружность с центром в начале координат и радиусом 1, а второе уравнение задает семейство окружностей с центром в точке $\left(a^2;a^2\right)$ и радиусом 1. Нас интересуют те окружности, которые имеют общие точки с полуокружностью.

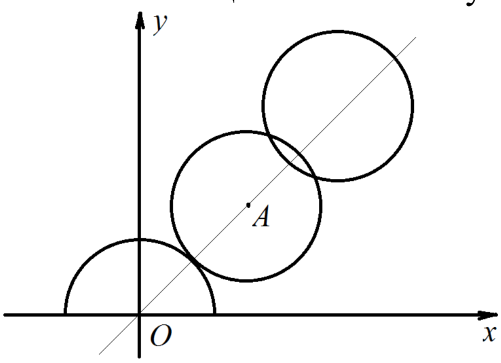


Рисунок 20

При a=0 полуокружность является подмножеством окружности семейства. Найдем центр $A\ \left(x_0;\ y_0\right)$ окружности, которая касается с полуокружностью. Так как отрезок $|OA|$=2 и $x_0=y_0$, то $x_0=y_0=\sqrt{2}$, то есть $a^2=\sqrt{2}$. При $a^2>\sqrt{2}$ соответствующие окружности полуокружность не пересекают, а при $a^2\le\sqrt{2}$ имеют хотя бы одну общую точку с полуокружностью. Решением неравенства $a^2\le\sqrt{2}$ является отрезок $\left[-\sqrt[4]{2};\sqrt[4]{2}\right]$.

Ответ: $\left[-\sqrt[4]{2};\sqrt[4]{2}\right]$.

Пример 18. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=1, \\ y=|x-a| \end{cases}$$ имеет ровно два различных решения?

Решение. Первое уравнение задает окружность с центром в точке (0; 1) и радиусом 1. Второе уравнение — прямой угол с вершиной в точке (a; 0) и симметричный относительно прямой $x=a$.

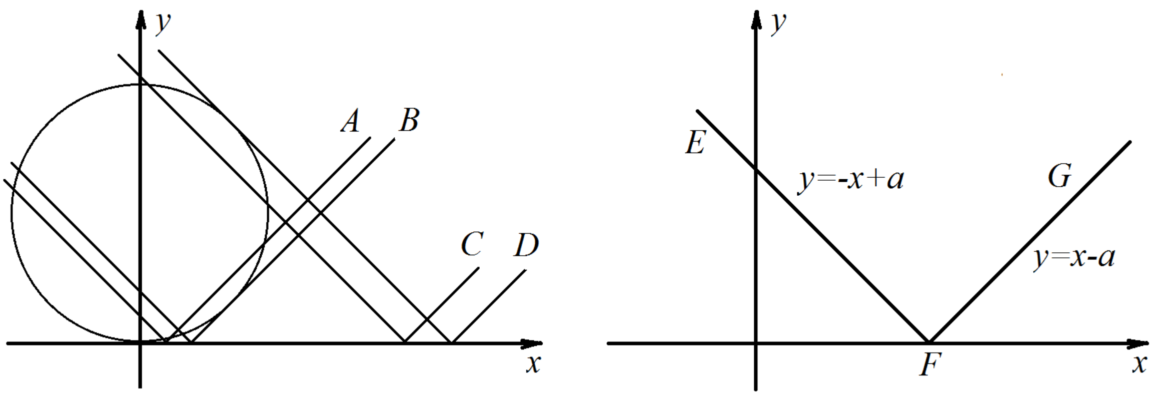


Рисунок 21

Поскольку ситуация симметрична относительно оси ординат, решим задачу при $a \geq 0$. При a=0 угол пересекает окружность ровно в 3 точках. Далее будем мысленно увеличивать значение параметра a, при этом угол будет «двигаться» вдоль оси абсцисс вправо. Сначала мы увидим углы типа A, которые пересекают окружность в четырех точках. Так мы дойдем до угла B, который имеет три общие точки с окружностью. Далее идут углы типа C. Это те углы, которые нам нужны – они имеют ровно две точки пересечения с окружностью. Угол D – граничный, сам он касается окружности, то есть имеет с ней одну общую точку, а все углы, лежащие правее него, окружность не пересекают.

Таким образом, нам надо найти значения параметра a для углов B и D. Для угла B параметр a находится из условия, что прямая y=x-a является касательной к окружности $x^2+(y-1)^2=1$, то есть уравнение $x^2+(x-a-1)^2=1$ имеет единственное решение. Уравнение $2x^2-2x(a+1)+a^2+2a=0$ имеет единственное решение, когда его дискриминант $D=(a+1)^2-2a^2-4a=-a^2-2a+1=0$. Из двух решений $a=-1\pm\sqrt{2}$ выбираем положительный $a=-1+\sqrt{2}$.

Для угла D параметр a находится из условия, что прямая y= -x+a является касательной к окружности $x^2+(y-1)^2=1$, то есть уравнение $x^2+(-x+a-1)^2=1$ имеет единственное решение. Уравнение $2x^2-2x(a-1)+a^2-2a=0$ имеет единственное решение, когда его дискриминант
$D=(a-1)^2-2a^2+4a=-a^2+2a+1=0$. Из двух решений $a=1\pm\sqrt{2}$ выбираем положительный $a=1+\sqrt{2}$.

Следовательно, углы типа C – это углы с $a\in\left(-1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$. Вспомним еще про отрицательные значения параметра a и получим ответ.

Ответ. $a\in\left(-1-\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$.

Пример 19. При каких значениях a корни уравнения $\left|x-a^2\right|=-a^2+2a+3$ имеют одинаковые знаки?

Решение. Построим графики функций $y=\left|x-a^2\right|$ и $y=-a^2+2a+3$.

Первое семейство $y = |x - a^2|$ - это семейство уголков, второе семейство $y = -a^2 + 2a + 3$ - это семейство прямых, параллельных оси абсцисс.

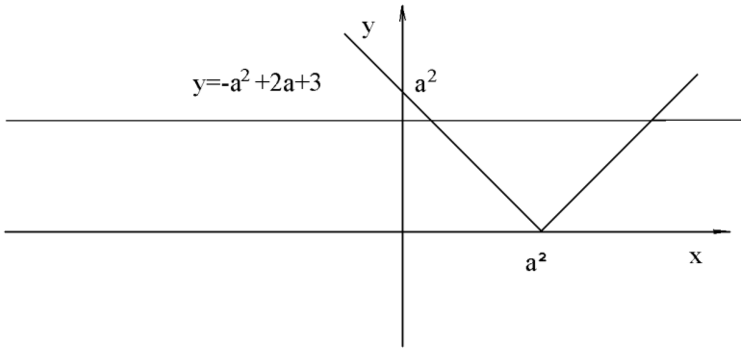


Рисунок 22

Эти прямые должны пересекать уголки в точках с абсциссами одного знака. Из рисунка видно, что при этом должны выполняться неравенства $-a^2 + 2a + 3 < a^2, -a^2 + 2a + 3 > 0$. Решаем полученную систему неравенств.

Ответ: $a \in (-1;\ (1-\sqrt{7})/2) \cup ((1+\sqrt{7})/2;\ 3)$.

Пример 20. При каких a уравнение $x - a = 2 \cdot |2|x| - a^2|$ имеет три корня?

Решение. Изобразим на рисунке графики двух функции $y = 2 \cdot |2|x| - a^2|$ и y=x–a.

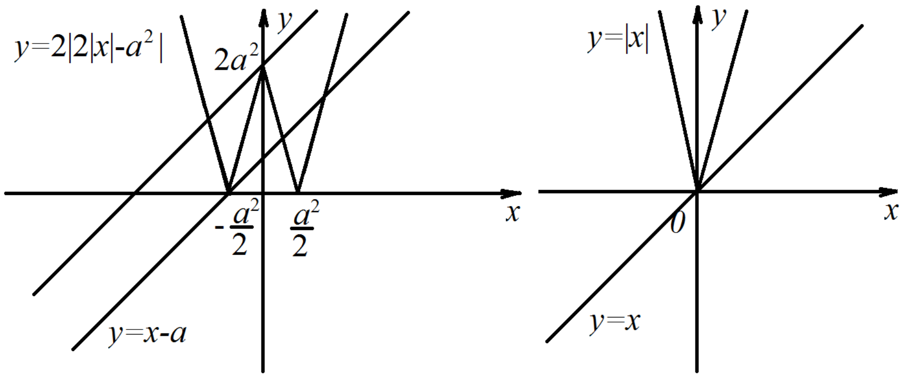


Рисунок 23

Левый рисунок для $a \neq 0$, правый – для a = 0. Уравнение имеет три решения только для тех прямых $y = x - a$, которые изображены на левом рисунке. Правая прямая y=x–a проходит через точку $\left(-\dfrac{a^2}{2};\,0\right)$, поэтому для нее получаем $a = -a^2/2$, откуда $a = -2$. Для левой прямой, проходящей через точку $(0;\,2a^2)$, имеем $-a = 2a^2$, откуда $a = -2$.

Ответ: $a = -2$ и $a = -1/2$.

Рассмотрим примеры, когда параметр a является угловым коэффициентом прямой.

Пример 21. При каких значениях a минимум функции

$y = -ax + |x^2 + 4x + 3|$ больше 1?

Решение. Переформулируем задачу: при каких a неравенство $|x^2 + 4x + 3| > 1 + ax$ выполняется для всех x? Построим графики функций $y = |x^2 + 4x + 3|$ и $y = 1 + ax$. График функции $y = 1 + ax$ представляет собой прямую, проходящую через точку (0; 1), причем параметр a представляет собой угловой коэффициент этой прямой. Нас интересуют прямые, которые находятся ниже графика $y = |x^2 + 4x + 3|$ для всех x.

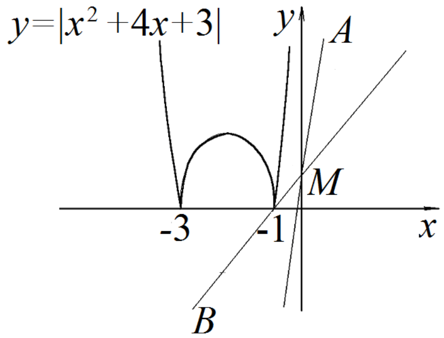


Рисунок 24

Найдем прямую *MA,* которая является касательной к графику функции $y = x^2 + 4x + 3$ в точке с координатой $x_0 > -1$. Для данной прямой уравнение $x^2 + 4x + 3 = 1 + ax$ должно иметь единственное решение. Следовательно, дискриминант квадратного уравнения $x^2 + (4 - a)\,x + 2 = 0$ равен 0, откуда $(4 - a)^2 - 8 = 0$. Далее, $a^2 - 8a + 8 = 0$. Отсюда $a = 4 \pm 2\sqrt{2}$. Осталось понять какое из двух значений a является «нашим». Подставив в уравнение $x^2 + (4 - a)\,x + 2 = 0$ значение $a = 4 + 2\sqrt{2}$, получим $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2 = 0$, откуда $x_0 = \sqrt{2} > -1$. Для $a = 4 - 2\sqrt{2}$, получим $x_0 = -\sqrt{2} < -1$. Следовательно, «нашим» является $a = 4 + 2\sqrt{2}$.

Прямая *MB* проходит через точки (0; 1) и (-1; 0), поэтому имеет уравнение $y = 1 + x$, откуда $a = 1$. Условию задачи удовлетворяют все прямые с угловым коэффициентом $a \in (1;\ 4 + 2\sqrt{2})$.

Ответ: $a \in (1;\ 4 + 2\sqrt{2})$.

Пример 22. Найдите все значения параметра *a*, для которых уравнение $x^4 - 4x^2 = ax^2 + 3$ имеет хотя бы одно решение на промежутке (–3; –1].

Решение. Мы эту задачу решаем уже третий раз. После замены $t = x^2$ мы получим такую переформулировку задания: при каких значения параметра *a* уравнение $t^2 - 4\,t - 3 = at$ имеет хотя бы одно решение на промежутке [1; 9)?

Рассмотрим графики функций $y = t^2 - 4\,t - 3$ и $y = at$. Первый – парабола, второй – прямая, проходящая через начало координат и с угловым коэффициентом *a*.

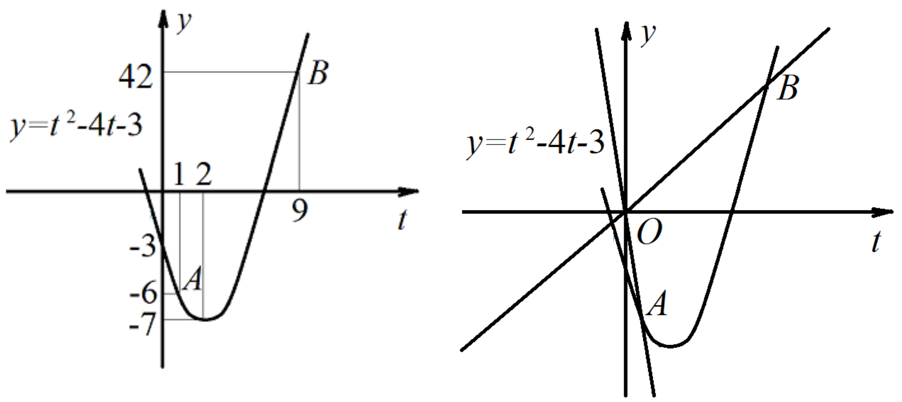


Рисунок 25

На рисунке слева изображена парабола $y = t^2 - 4t - 3$, а на рисунке справа – эта же парабола с прямыми *OA* и *OB*. Прямая *OA* имеет уравнение $y = -6x$, так как проходит через начало координат и точку *A* (1; –6), а прямая *OB* имеет уравнение $y = \frac{14}{3}x$, так как проходит через начало координат и точку *B* (9; 42). Условию задачи удовлетворяют все прямые с угловым коэффициентом $a \in [1;\ 14/3)$.

Ответ: $a \in [1;\ 14/3)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каких значениях параметра *a* уравнение $18x^2 + ax + 8 = 0$ имеет хотя бы один корень?

2. Уравнение $3x^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень, равный 1. Чему равны *b* и *c*?

3. Уравнение $ax^2 + bx + 5 = 0$ имеет единственный корень, равный 1. Чему равны *a* и *b*?

4. При каких значениях параметра *a* система уравнений $\begin{cases} 2x + ay = 11, \\ 8x - 6y = 1 \end{cases}$ не имеет решений?

5. При каком наименьшем целом значении параметра *a* неравенство $4 \sin x + 1 < a$ выполняется при всех *x*?

6. При каких значениях параметра *a* система неравенств $\begin{cases} 2x + a \geq 12, \\ x - 2a \leq 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

7. При каких значениях параметра *a* уравнение $x^4 + (1 - 2a)x^2 + a^2 - 1 = 0$

а) имеет ровно четыре различных корня;

б) имеет ровно три различных корня;

в) имеет ровно два различных корня;

г) имеет ровно один корень;

д) не имеет корней?

8. При каких значениях параметра *a* уравнение

$\sin^2 x + (1-2a)\sin x + a^2 - 1 = 0$ не имеет решений?

9. При каких значениях a система $\begin{cases} y - \sqrt{x} = a, \\ y - x = 1 \end{cases}$

имеет единственное решение?

10. При каких значениях a неравенство $\sqrt{x+a} \geq x+1$ имеет решения?

11. При каких значениях a уравнение $\left||2x|-1\right| = x - a$ имеет три решения?

12. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = 4, \\ x + 3|y| + 5 = 0 \end{cases}$

имеет ровно три различных решения?

13. При каких значениях a уравнение $\left||x|-3\right| = a(x-9)$ имеет одно, два, три, четыре решения?

14. При каких значениях a уравнение $\log_{x+1} ax = 2$ имеет одно решение?

15. Сколько решений имеет система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ (y - ax)(y - a\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$?

16. При каких значениях a уравнение $|2x - a| + 1 = |x + 3|$

имеет одно решение?

Глава 4. Геометрия

1. Планиметрия

Перед решением задач вспомним некоторые свойства, теоремы из раздела планиметрии.

Треугольник и четырехугольники.

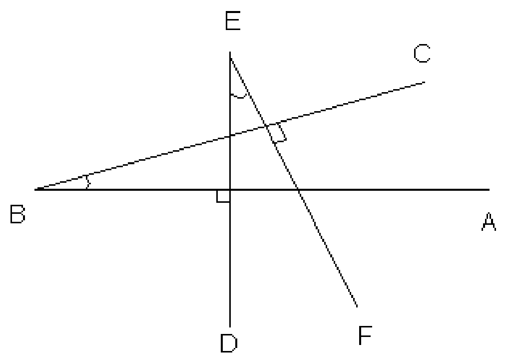
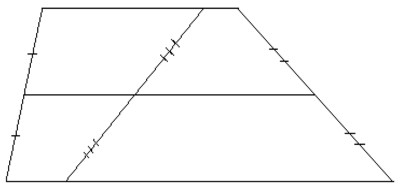


Рисунок 26

1. Теорема о равенстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами: если $\angle ABC$ и $\angle DEF$ оба острые или оба тупые и $AB \perp DE$, $BC \perp EF$, то $\angle ABC = \angle DEF$.

2. Свойства средней линии трапеции:



а) средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции;

б) средняя линия равна полусумме оснований трапеции;

в) средняя линия (и только она) делит пополам любой отрезок, заключенный между основаниями трапеции.

Рисунок 27

3. Теоремы о точках пересечения медиан, биссектрис, высот треугольника:

а) три медианы треугольника пересекаются в одной точке (ее называют центром тяжести или центроидом треугольника) и делятся в этой точке в отношении 2:1, считая от вершины;

б) три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке;

в) три высоты треугольника пересекаются в одной точке (ее называют ортоцентром треугольника).

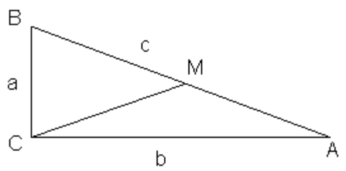
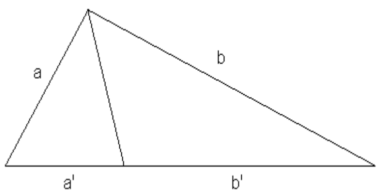


Рисунок 28

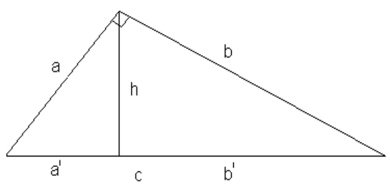
4. Свойство медианы в прямоугольном треугольнике:

в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

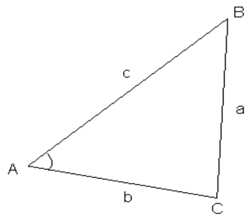
Верна и обратная теорема: если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.



5. Свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника: биссектриса внутреннего угла треугольника делит сторону, к которой она проведена, на части, пропорциональные прилежащим сторонам: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$.



6. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике: если a и b - катеты, c - гипотенуза, h - высота, a' и b' - проекции катетов на гипотенузу, то: $h^2 = a'b'$, $a^2 = ca'$,



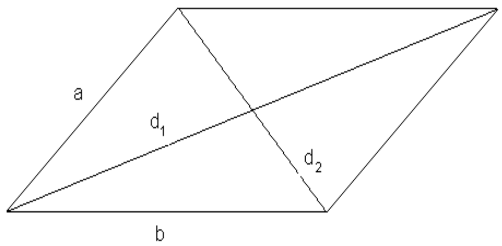
$$b^2 = cb', \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad h = \frac{ab}{c}.$$

7. Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Рисунки 29-31

8. Теорема синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, где R - радиус описанной окружности.

9. Метрические соотношения в параллелограмме:



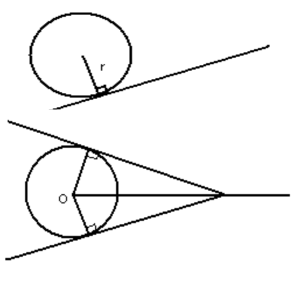
сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Рисунок 32

Окружность

1. Свойства касательных к окружности:



радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной,

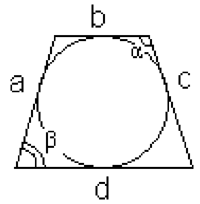
две касательные, проведенные к окружности из одной точки равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

Рисунки 33-34

2. Теоремы об окружностях и треугольниках:

а) во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности служит точка пересечения биссектрис;

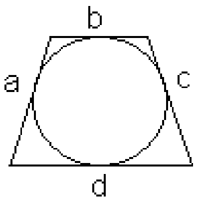
б) около всякого треугольника можно описать окружность, центром окружности служит точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



3. Теоремы об окружностях и четырехугольниках:

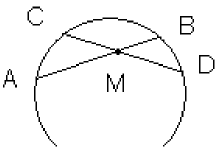
а) для того, чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно,

чтобы сумма противоположных углов четырехугольника была равна 180 градусов: $\alpha + \beta = 180°$.

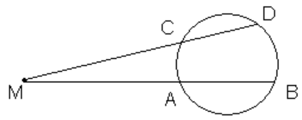


б) для того, чтобы в четырехугольнике можно было вписать окружность необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных его сторон были равны: $a + c = b + d$.

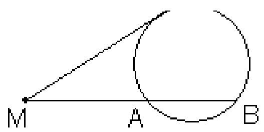
Рисунки 35-36



4. Метрические соотношения в окружности:
а) если хорды AB и CD пересекаются в точке M, то $AM{\cdot}BM=CM{\cdot}DM$;



б) если из точки M к окружности проведены две секущие MAB и MCD, то $AM{\cdot}BM=CM{\cdot}DM$;



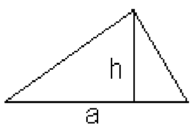
в) если из точки M к окружности проведены секущая MAB и касательная МС, то $AM{\cdot}BM= CM^2$

Рисунки 37-39

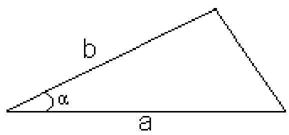
Площади фигур

Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Формулы для вычисления площади треугольника:



$$S = \frac{a \cdot h}{2},$$



$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\alpha,$$

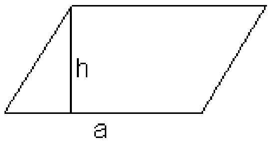
Рисунки 40-41

$S = \dfrac{abc}{4R}$, где R – радиус описанной окружности, a, b, c – стороны треугольника,

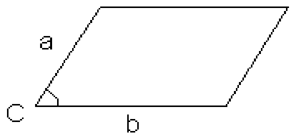
$S = p{\cdot}r$, p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности,

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – формула Герона.

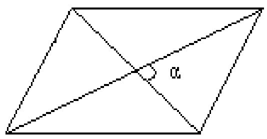
Формулы для вычисления площади параллелограмма:



$S=a\cdot h$,



$S=ab\cdot\sin C$,



$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где d_1 и d_2 – диагонали параллелограмма, α – угол между ними.

Рисунки 42-44

Формула площади трапеции: $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$, где *a,b* – основания трапеции, *h* – высота трапеции.

При решении задач используйте определения и свойства входящих в условие элементов. Вспомните теоремы, в которых связаны данные и искомые элементы задачи, вспомните похожие задачи. Следите, чтобы были использованы все условия задачи.

Пример 1. Из вершин прямого угла прямоугольного треугольника проведена биссектриса, делящая гипотенузу на отрезки m и n. Найти высоту, проведенную к гипотенузе.

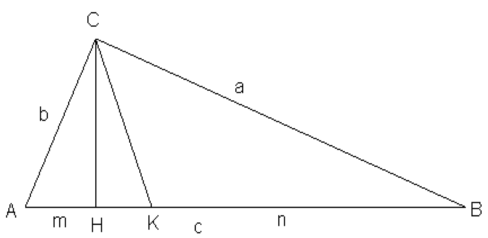


Рисунок 45

Решение. CK - биссектриса, $AK=m$, $KB=n$, $BC=a$ - катет, $AC=b$ - катет, $AB=c$ - гипотенуза. $AB=m+n$ - по условию задачи. По свойству биссектрисы $\frac{a}{b}=\frac{n}{m}$. Отсюда $a=\frac{bn}{m}$.

По теореме Пифагора $c^2=a^2+b^2$, т.е. $(m+n)^2=a^2+b^2$. Подставим вместо a выражение $\frac{bn}{m}$: $(m+n)^2=\frac{b^2(m^2+n^2)}{m^2}$.

Откуда $b^2=\frac{(m+n)^2m^2}{(m^2+n^2)}$ или $b=\frac{(m+n)m}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

Кроме того, для высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу $h=\dfrac{ab}{c}$, где $c=m+n$.

Ответ. $h=\dfrac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$.

Пример 2. В треугольнике ABC известно, что $BC=12$ см, $AC=8$ см и угол A вдвое больше угла B. Найти AB.

Решение. $BC=12$, $AC=8$. Пусть $\angle B=\beta$. Тогда $\angle A=2\beta$. По теореме синусов, примененной к ΔABC, $\dfrac{BC}{\sin 2\beta}=\dfrac{AC}{\sin 2\beta}$.

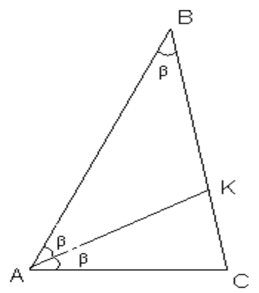


Рисунок 46

Преобразуем это выражение, учитывая $\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta$,

$$\frac{3}{2\sin\beta\cos\beta}=\frac{2}{\sin\beta}.$$ Получим $\cos\beta=\dfrac{3}{4}$.

По теореме косинусов $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\beta$. Обозначим AB через x и получим уравнение

$$8^2=x^2+12^2-24x\frac{3}{4}.$$

Приходим к квадратному уравнению $x^2-18x+80=0$. Найдем корни: $x_1=10$, $x_2=8$. Проверим оба значения.

Если $AB=8$, ΔABC равнобедренный ($AB=AC=8$) и $AK=BK=KC=6$. Тогда $2\beta=90°$ и теорема Пифагора не выполняется. Остается $AB=10$ см.

Ответ.10 см.

Пример 3. Из внешней точки к окружности проведены секущая длинной 48 см и касательная, длина которой составляет $\dfrac{2}{3}$ от внутреннего отрезка секущей. Найти радиус окружности, если секущая удалена от центра на расстоянии 24 см.

Решение. По условию MA=48 см, OH=24 см, $MC=\dfrac{2}{3}AB$.

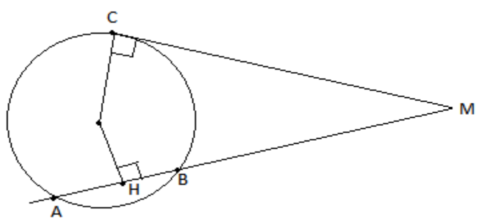


Рисунок 47

Пусть $AB = x$. Из точки M проведены касательная MC и секущая MAB, поэтому выполнятся условие $MC^2 = MA \cdot MB$ или $\left(\frac{2}{3}x\right)^2 = 48(48 - x)$.

Получаем уравнение $x^2 + 108x - 5184 = 0$.

Корни этого уравнения $x_{1,2} = -54 \pm 90$. Задаче удовлетворяет корень x = 36. Из ΔOBH находим R – радиус окружности, используя теорему Пифагора:

$OH = 24, OH \perp HB$. Поэтому $R = 30$см.

Ответ. 30 см.

Пример 4. Один из углов треугольника равен $60°$. Точка касания вписанной окружности делит противоположную этому углу сторону на отрезки a и b. Найти площадь треугольника.

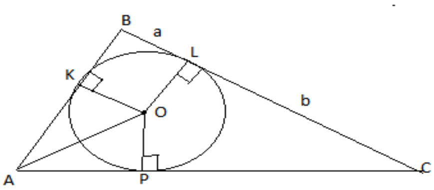


Рисунок 48

Решение. Центр вписанной окружности - точка пересечения биссектрис. Поэтому $\angle KAO = 30°$. KO – катет, лежащий против угла в $30°$. Пусть r – радиус вписанной окружности, тогда $AO = 2r$ и $AK = r\sqrt{3}$. По свойству касательных, проведенных из общей точки к окружности

$$\begin{cases} AK = AP = r\sqrt{3}, \\ BK = BL = a, \\ CP = CL = b. \end{cases}$$

Для вычисления площади треугольника используя формулу $S_\Delta = pr$, где p – полупериметр треугольника. $S_\Delta = \left(a + b + r\sqrt{3}\right)r$ $(*)$. С другой стороны, $S_\Delta = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60°$, т.е. $S_\Delta = \frac{1}{2}\left(a + r\sqrt{3}\right)\left(b + r\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$ (**).

Из (*) и (**) получаем $r^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}(a + b)r = ab$. Возвращаясь к (*), получим $S_\Delta = \sqrt{3}\left(r^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}(a + b)r\right)$. Выражение в скобках равно ab.

Ответ. $S_\Delta = ab\sqrt{3}$.

2. Стереометрия

Прежде чем представить задачи для самостоятельного решения, целесообразно для начала рассмотреть ряд «опорных» стереометрических задач на нахождение основных метрических стереометрических величин:

нахождения расстояния от точки до прямой;

расстояния между скрещивающимися прямыми;

угла между скрещивающимися прямыми;
угла между пересекающимися прямыми;
угла между прямой и плоскостью;
угла между плоскостями.

Представленные решения задач вовсе не претендуют на единственность. Более того, каждая задача имеет минимум два способа решения, поэтому разберем возможные варианты решения каждой представленной задачи.

Пример 5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 7, найдите расстояние от точки B до прямой D_1C_1.

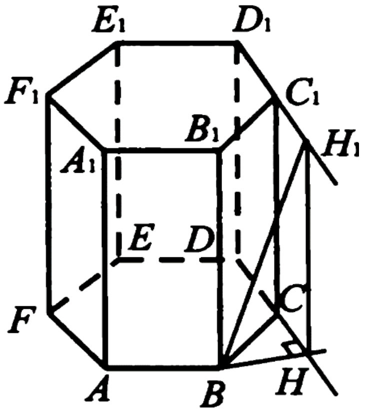


Рисунок 49

Решение. Построим $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ - правильную шестиугольную призму, $AB = BC = ... = AF_1 = 7$. Необходимо найти $\rho(B, D_1C_1) - ?$

1) Проведём $BH \perp DC$ и $HH_1 \parallel BB_1$, $BB_1 \perp (ABC) \Rightarrow HH_1 \perp (ABC)$, где BH_1 - наклонная, BH - проекция наклонной $\Rightarrow BH_1 \perp DC$ - по теореме о трёх перпендикулярах.

Так как $D_1C_1 \parallel DC \Rightarrow BH_1 \perp D_1C_1 \Rightarrow BH_1$ - искомое расстояние.

2) Из $\Delta\, BHC$: $\angle H = 90^o$, $\angle BCH = 180^o - \angle BCD$.
$\angle BCD = 120^o$ - так как $ABCDEF$ правильный шестиугольник.
$\angle BCH = 180^o - 120^o = 60^o$,

$\sin \angle BCH = \dfrac{BH}{BC}$, $BH = BC * \sin \angle BCH = 7 * \sin 60^o = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.

3) Из $\Delta\, BHH_1$: $\angle H = 90^o \Rightarrow BH_1 = \sqrt{BH^2 + HH_1^2} = \dfrac{7\sqrt{7}}{2}$.

Ответ. $\dfrac{7\sqrt{7}}{2}$.

Пример 6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ все рёбра равны 4. Найдите расстояние между прямыми AB и SC.

Решение. Дано: $SABC$- правильная треугольная пирамида, $AB = BC = ... = SC = 4$, SO-высота, $SO \perp (ABC)$. Найти: $\rho(AB, SC) - ?$

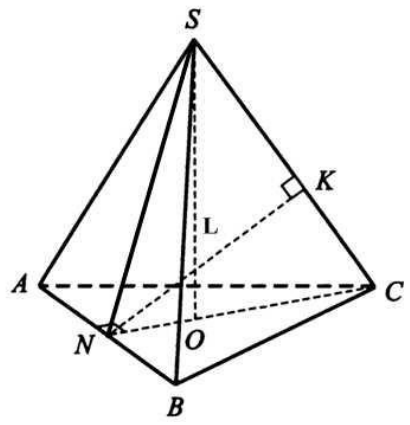


Рисунок 50

1) Опустим перпендикуляр CN к стороне AB, $AN = NB$, так как треугольник ABC - равносторонний. $SABC$ - правильная пирамида $\Rightarrow$ S проектируется в точку O на (ABC) и $O \in NC$.

Построим перпендикуляр SN, $SN = NC$ так как $\Delta ABC = \Delta ABS$. $(SNC) \perp (ABC)$ так как $SO \subset (SNC)$ и $SO \perp (ABC)$.

2) Рассмотрим Δ SNC, он будет равнобедренным. Опустим перпендикуляр NK на ребро SC. Тогда NK -искомое расстояние, так как: $NK \cap SO = L, NO \perp AB$, NO - проекция NL на плоскость (ABC) и, следовательно $NL \perp AB \Rightarrow NK \perp AB$.

$NC = \sqrt{BC^2 - NB^2} = 2\sqrt{3}$. $SN = NC$, так как все грани пирамиды равны $\Rightarrow$ NK - медиана и $SK = KC = 2$.

3) Из треугольника NCK находим $NK = \sqrt{NC^2 - KC^2} = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Пример 7. В правильной четырёхугольной $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призме стороны основания равны 4, а боковые рёбра – 3. Найдите угол между прямыми BD и AD_1.

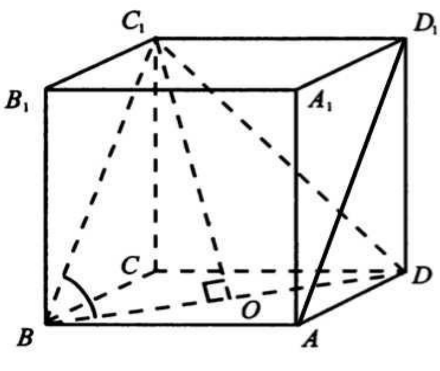


Рисунок 51

Решение. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - правильная четырёхугольная призма. $AB = BC = CD = DA = 4$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 3$. Найти угол между прямыми BD и AD_1.

1) По условию в основании призмы лежит квадрат $ABCD$. BD и AD_1 - скрещивающиеся. $(BB_1C_1) \parallel (AA_1D_1)$ $\Rightarrow$ $BC_1 \parallel AD_1$, следовательно угол C_1BD - искомый.

$BC_1 = DC_1$ как диагонали равных граней и, следовательно, Δ C_1BD равнобедренный. $BC_1 = DC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = 5$, $BD = 4\sqrt{2}$.

2) Обозначим через точку O – середину отрезка BD.

$$\cos\angle C_1BO = \frac{OB}{BC_1} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \angle C_1BO = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{2}$.

Пример 8. Сторона основания правильной треугольной пирамиды $PABC$ равна 6, а боковое ребро $AP=\sqrt{28}$. Точка N делит высоту PO пополам. Найдите $\angle OAN$.

Решение. Построим $PABC$ - правильную треугольную пирамиду, где $AP=\sqrt{28}$, $AB=BC=CA=6$, $NP=NO$.

Треугольник ABC - равносторонний по условию, O - точка пересечения медиан основания.

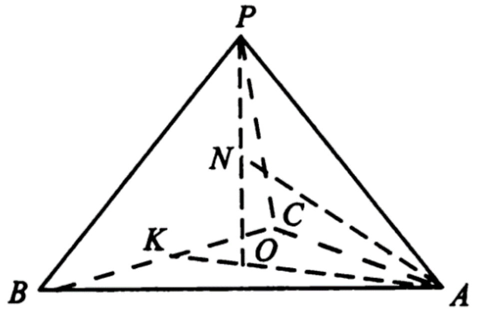


Рисунок 52

AK - высота $\Delta\, ABC$, $AK=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=3\sqrt{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow OA=\frac{2}{3}AK=2\sqrt{3}$,

$PO=\sqrt{PA^2-OA^2}=\sqrt{28-12}=4$,

$NO=\frac{1}{2}PO=2$, $tg\angle OAN=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\angle OAN=30^o$.

Ответ. 30^o.

Пример 9. Около шара описана правильная усечённая четырёхугольная пирамида, у которой площадь одного основания в 9 раз больше площади другого. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

Решение. Дано: Усечённая правильная четырехугольная пирамида, вписанный шар, $S_1=9S_2$. Найти: $\angle CDK$.

1) CD - пусть высота боковой грани, CK - перпендикуляр к большему основанию, DK - проекция CD на большее основание. $\angle CDK$ - искомый.

2) Рассмотрим сечение $CDMN$, оно является равнобедренной трапецией с основаниями $AD=2b$ и $BC=2a$ и со вписанной окружностью, диаметр которой равен высоте трапеции.

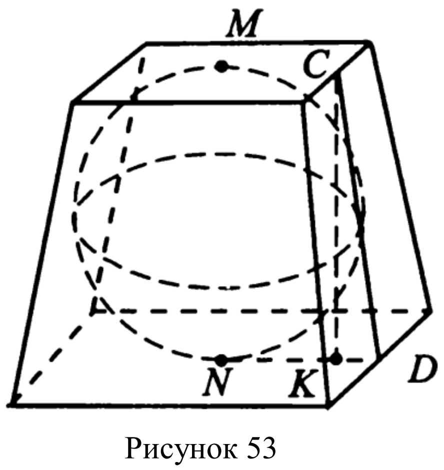


Рисунок 53

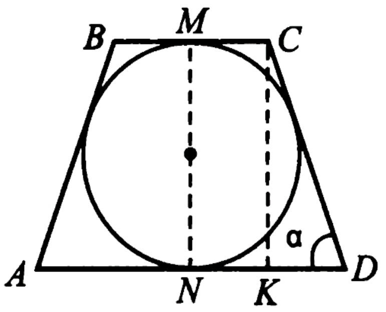


Рисунок 54

Площади основания относятся как 1:9, то $(2b)^2 = 9(2a)^2$ или $b = 3a$,
$CD = CM + DN = a + 3a = 4a$,

$DK = DN - NK = 3a - a = 2a$.

3) Из треугольника CKDследует, что

$$\cos\alpha = \frac{KD}{CD} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{3}$.

Пример 10. В правильном тетраэдре $SABC$ точки M и N делят ребро SB на три равные части. Найдите угол между плоскостями AMC и ANC.

Решение. Построим $SABC$ - правильный тетраэдр, точки $M \in SB, N \in SB$, $SM = NM = NB$.

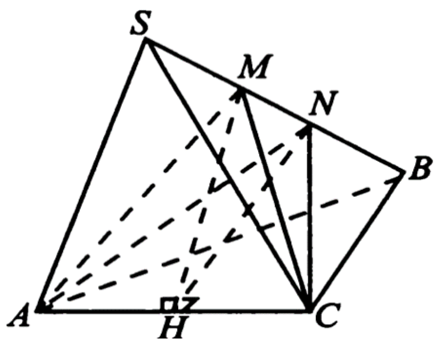


Рисунок 55

1) Пусть все рёбра тетраэдра равны a. Тогда $SM = MN = NB = \frac{a}{3}$. $AM = MC$, $AN = NC$, $MH \perp AC, NH \perp AC \Rightarrow \angle MHN$ - искомый.

2) По теореме косинусов:

$$CM^2 = SC^2 + SM^2 - 2CS * SM * \cos 60^o = \frac{7a^2}{9},$$

$$CM = CN = \frac{\sqrt{7}}{3}a, \quad HM = HH = \sqrt{CM^2 - CH^2} = \frac{\sqrt{19}}{6}a.$$

3) Из треугольника HMN:

$$\cos\angle MHN = \frac{HM^2 + HN^2 - MN^2}{2HM * NH} = \frac{a^2\left(\frac{19}{36} + \frac{19}{36} - \frac{1}{9}\right)}{a^2 * 2 * \frac{19}{36}} = \frac{17}{19}, \ \angle MHN = \arccos\frac{17}{19}.$$

Ответ. $\arccos\frac{17}{19}$.

Пример 11. В сферу объёмом 36π вписана правильная шестиугольная пирамида. Расстояние от центра сферы до основания пирамиды равно 1. Найдите объём пирамиды.

Решение. Дано: Сфера, правильная шестиугольная пирамида, $V_{сф} = 36\pi$, где $OH = 1$.

1) Пусть R радиус сферы, тогда $36\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$, откуда $R = 3$.

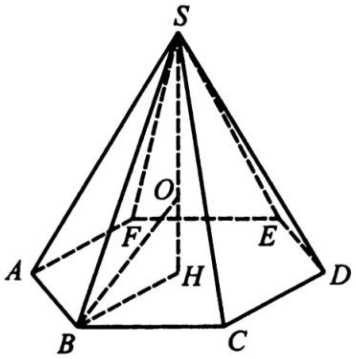


Рисунок 56

Через a обозначим сторону основания, через h - высоту пирамиды. Возможны два случая (так центр описанной окружности равноудалён от вершин основания): O - центр сферы, лежит либо внутри пирамиды (Рисунок 55), либо вне неё (Рисунок 56).

2) Из треугольника OBH: $H = 90^o$, $BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - OH^2} = 2\sqrt{2}$.

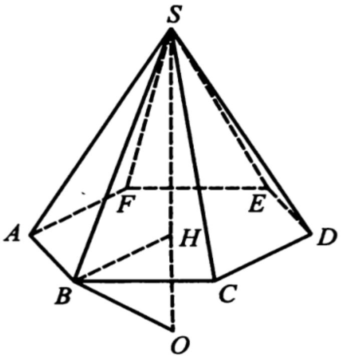


Рисунок 57

3) $S_{осн} = 6 * \frac{1}{2} a * \frac{a\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$,

4) $V_{пир} = \frac{1}{3} * h * S_{осн}$.

$h = R + OH = 4 \Rightarrow V = 16\sqrt{3}$, или

$h = R - OH = 2 \Rightarrow V = 8\sqrt{3}$.

Ответ. $16\sqrt{3}$ или $8\sqrt{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольник с боковыми сторонами 9 и 15 см вписан параллелограмм так, что одна из его сторон длиной 6 см лежит на основании треугольника, а диагонали соответственно параллельны боковым сторонам треугольника. Найти другую сторону параллелограмма и основание треугольника.

2. В квадрат *ABCD* вписан равнобедренный треугольник *AKM* так, что точка *K* лежит на стороне *BC*, точка *M* – на *CD* и *AM* = *AK*. Найти угол *MAD*, если известно, что $tg\angle AKM = 3$.

3. В прямоугольном треугольнике один катет равен 48 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 3,92 см. Найти длину вписанной окружности.

4. Найти площадь треугольника, зная его стороны a и b и биссектрису

$l_c = l$.

5. Равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) описана около окружности с центром в т. O. Прямая AO пересекает сторону CD в т. K. Найти радиус окружности и площадь трапеции, если $AO = 5$ и $OK = 3$.

6. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AD и CE. Известно, что площадь треугольника ABC равна 64см^2, а площадь треугольника BDE равна 16 см^2. Найти длину отрезка DE, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $16\sqrt{3}$ см.

7. В правильной треугольной призме сторона основания равна a, угол между непересекающимися диагоналями двух боковых граней равен . Найти высоту призмы.

8. Ребра прямоугольного параллелепипеда относятся как $3:4:12$. Через большое ребро проведено диагонально сечение. Найти синус угла между плоскостью этого сечения и не лежащей в ней диагональю параллелепипеда.

9. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a. Угол между смежными боковыми гранями равен α. Найти боковую поверхность пирамиды.

10. Основанием пирамиды служит параллелограмм $ABCD$, имеющий площадь m^2 и такой, что $BD \perp AD$; двугранные углы при ребрах AD и BC равны 45^o, а при ребрах AB и CD равны 60^o. Найти боковую поверхность и объём пирамиды.

11. Конус с радиусом основания 2 и углом при вершине 60^o касается сферы в единственной точке A, сфера касается плоскости, в которой лежит основание конуса, в точке B, прямая проходящая через центр основания конуса и точку A, пересекает сферу в точке диаметрально противоположной точке B. Найдите радиус сферы.

Вильданова В.Ф., Кудашева Е.Г.

Элементарная математика

Методическое пособие

Часть1

Формат 60Х84/16. Компьютерный набор.

Гарнитура Times New Roman.

Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. – 4,4. Уч.-изд. л. – 4,2.

Тираж 50 экз. Заказ №59

МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.АКМУЛЛЫ

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Уфа 2018

Объем, порядок и выполнение курсовой работы

1. **Объем курсовой работы** для студентов магистратуры 25-30 страниц компьютерного текста, включая список использованных источников и литературы, не считая приложений. Курсовые работы не должны существенно превышать указанный объем.

2. **Порядок подготовки курсовой работы**. В соответствие с положением о курсовой работе, студент обязан ее выполнять в соответствие с требованиями, установленными методическими рекомендациями по разработке курсовых работ, а также в соответствии с графиком выполнения курсовой работы, составленным совместно с научным руководителем.

Подготовка курсовой работы состоит из 3-х основных этапов, каждый из которых включает в себя набор шагов:

1. Выбор темы курсовой работы.
2. Выполнение курсовой работы.
3. Защита курсовой работы.

3. **Выполнение курсовой работы**

Подбор литературы.

Важнейшее значение имеет самостоятельный поиск исторической литературы и источников, их аналитическое рассмотрение и использование в работе. Процесс подбора литературы целесообразно начинать с изучения тех работ, которые близки к выбранной студентами тематике.

Очень важным является умение работать в поисковых системах. Желательно использовать возможности тематического поиска источников и литературы в основных электронно-библиотечных системах библиотеки БГПУ им. М.Акмуллы.

Для подбора изданий по интересующей теме могут быть использованы списки литературы, содержащиеся в уже проведенных исследованиях (диссертациях на соискание ученых степеней, отчетах по НИР и т.д.). При подборе литературы необходимо сразу составлять библиографическое описание отобранных изданий в строгом соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению списка использованных источников. Данный список по теме курсовой работы согласовывается с научным руководителем.

Составление плана исследования

Примерный план курсовой работы целесообразно составить на начальной стадии работы. Изучение исследовательской литературы дает возможность предварительно продумать содержание работы, определить ее основную цель, а также те задачи, решение которых должно последовательно, шаг за шагом, привести к достижению цели.

Это позволяет разработать структуру будущей работы: каждой из поставленных задач исследования должен соответствовать раздел или подраздел работы – глава или параграф. Главы и параграфы могут выделяться либо по проблемному принципу (в таком случае в каждом разделе рассматривается определенный аспект изучаемой темы), либо по хронологическому (каждому разделу соответствует определенный этап в истории изучаемого явления, разделы следуют друг за другом в хронологическом порядке). На практике часто применяется смешанный, проблемно-хронологический принцип.

Работа над текстом курсовой работы

В соответствии с планом работ заблаговременно до защиты студент должен предоставить окончательную версию курсовой работы научному руководителю с целью получения коррекционных замечаний и устного отзыва о проделанной работе. Студент должен доработать курсовую работу с учетом рекомендаций и замечаний научного руководителя.

Перед сдачей окончательной версии текста курсовой работы студент должен самостоятельно произвести загрузку курсовой работы для определения оригинальности текста по системе «Антиплагиат» и сообщить о результате научному руководителю. В случае выявления факта большого процента плагиата, когда уникальность текста курсовой работы менее 50% (для студентов ДО), менее 40% (для студентов ОЗО) научный руководитель вправе вернуть курсовую работу на доработку. Студент, не сдавший и не защитивший в срок курсовую работу, считается имеющим академическую задолженность, которая ликвидируется им в установленном порядке.

Курсовая работа для проверки руководителем сдается на кафедру и регистрируется в соответствующем журнале согласно номенклатуре дел кафедры.

Защита курсовой работы

Защита курсовой работы производится публично до сдачи экзаменационной сессии. Как правило, студент защищает работу перед научным руководителем или перед комиссией, состоящей из преподавателей кафедры. На защите курсовой работы студент излагает основное содержание работы и ее результатов и отвечает на вопросы по данной теме. По результатам защиты курсовой работы выставляется оценка в электронную ведомость и зачетку студента. При получении неудовлетворительной оценки студент считается имеющим академическую задолженность, которую имеет право ликвидировать в установленном порядке.

Критерии оценивания курсовой работы

1. Общая характеристика работы:

- структура работы;
- грамотность и логичность изложения материала;
- стилистика изложения, владение научной терминологией;
- соответствие требованиям к оформлению.

2. Компетентность автора:

- актуальность заявленной проблемы;
- четкость формулировки проблемы – цель, задачи, предмет, объект, методологические основы исследования;
- обоснованность подбора и анализа источников и литературы;
- качество и полнота цитируемых источников и литературы.

3. Собственные достижения автора:

- новизна работы;
- аргументированность выводов;
- представленность основных положений исследования в виде докладов на научно-практических конференциях, статей в научных журналах, сборниках статей.

4. Дополнительные критерии:

- четкое исполнение плана работ над курсовым проектом;
- проявленный интерес автора к теме;
- общая успеваемость автора по базовой учебной дисциплине курсовой работы и т.п.

После защиты курсовая работа хранится на кафедре до окончания обучения студента в вузе и отчисления в связи с завершением освоения образовательной программы.

Содержание курсовой работы

К моменту написания курсовой работы в магистратуре у студента, как правило, накоплен солидный опыт реализации исследовательской работы, в частности, в виде написания выпускной квалификационной работы бакалавра. Таким образом, магистр должен быть в состоянии самостоятельно произвести постановку проблемы, собрать материал по выбранной теме, описать, структурировать и проанализировать его.

Согласно установленной на кафедре практике, курсовая работа представляет собой подготовку к написанию выпускной квалификационной работы (магистерской диссертации). Объем курсовой работы студента магистратуры – 25-30 страниц. В курсовой работе студентов рассматриваются научные основы исследования по выбранной теме. Она во многом основывается на результатах Практики по получению профессиональных умений.

В этой связи курсовая работа призвана сделать задел выпускной квалификационной работы в виде ее вводной части (введения).

В структуре курсовой работы должны присутствовать следующие обязательные элементы:

1. Введение (актуальность, цель и задачи работы, объект, предмет, хронологические, территориальные рамки, методологические основы, степень изученности проблемы, источниковая база, научная новизна, практическая значимость исследования, описание структуры курсовой работы).

2. Теоретическая и практическая главы, включающие по 2-3 параграфа.

3.Заключение.

4. Список использованных источников и литературы.

Стилистика курсовой работы

Текст курсовой работы должен быть выдержан в научном стиле, который обладает некоторыми характерными особенностями. Прежде всего, научному стилю присуще использование конструкций, исключающих употребление местоимений первого лица единственного числа (я). Не следует применять местоимения второго лица единственного числа (он - она). Более уместным является использование в тексте работы оборотов, содержащих местоимений (мы, нами). («Например, мы рассматриваем, мы видим, нами изучаются»). Предполагается использовать формы изложения от третьего лица (например, «Автор полагает...»); конкретно от имени автора (например, «По мнению исследователя В.А.Петрова….»).

В научном тексте нельзя использовать разговорно-просторечную лексику. Необходимо применять соответствующие терминологические названия. Если есть сомнения в стилистической окраске слова, лучше обратиться к словарю. Важнейшим средством выражения смысловой законченности, целостности и связности научного текста является использование специальных слов и словосочетаний.

Подобные слова позволяют отразить следующее:

– последовательность изложения мыслей (вначале, прежде всего, затем, во-первых, во-вторых, значит, итак);

– переход от одной мысли к другой (прежде чем перейти к, обратимся к, рассмотрим, остановимся на, рассмотрев, перейдем к, необходимо остановиться на, необходимо рассмотреть);

– противоречивые отношения (однако, между тем, в то время как, тем не менее);

– причинно-следственные отношения (следовательно, поэтому, благодаря этому, сообразно с этим, вследствие этого, отсюда следует, что);

– различную степень уверенности и источник сообщения (конечно, разумеется, действительно, видимо, надо полагать, возможно, вероятно, по сообщению, по сведениям, по мнению, по данным);

– итог, вывод (итак, таким образом, значит, в заключение отметим, все сказанное позволяет сделать вывод, резюмируя сказанное, отметим).

Для выражения логической последовательности используют сложные союзы: благодаря тому что, между тем как, так как, вместо того чтобы, ввиду того что, оттого что, вследствие того что, после того как, в то время как и др. Особенно употребительны производные предлоги в течение, в соответствии с, в результате, в отличие от, наряду с, в связи с, вследствие и т.п.

В качестве средств связи могут использоваться местоимения, прилагательные и причастия (данные, этот, такой, названные, указанные, перечисленные). В научной речи очень распространены указательные местоимения «этот», «тот», «такой». Местоимения «что-то», «кое-что», «что-нибудь» в тексте научной работы обычно не используются.

Для выражения логических связей между частями научного текста используются следующие устойчивые сочетания: приведем результаты, как показал анализ, на основании полученных данных.

С целью образования превосходной степени прилагательных чаще всего используются слова наиболее, наименее. Не употребляется сравнительная степень прилагательного с приставкой по (например, повыше, побыстрее). Особенностью научного стиля является констатация признаков, присущих определяемому слову.

Сокращение слов в тексте не допускается (за исключением общепринятых графических сокращений по начальным буквам слов или по частям слов). Например, разрешаются следующие сокращения: «и т.д.» (и так далее), «и др.» (и другие), «т.е.» (то есть), После перечисления пишут т.е. (то есть), и т.д. (и так далее), и т.п. (и тому подобное), и др. (и другие), и пр. (и прочие). В тексте курсовой работы допускаются общепринятые сокращения употребляемые:

– с географическим наименованием: г. перед названием городов, но не в начале предложения;

– при датах, написанных цифрами: «г.» (год), «гг.» (годы), «в.» (век), «вв.» (века), «н.э.» (нашей эры).

– при ссылках: с. — страница, см. — смотри, ср. — сравни;

– при указании сумм и количеств, написанных цифрами: тыс. — тысяча (вместо нулей), млн. — миллион (вместо нулей), млрд. — миллиард (вместо нулей), руб. — рубль, долл. — доллар, у.е. — условная единица.

В тексте используются только арабские цифры, но при нумерации кварталов, полугодий, веков, тысячелетий допускается употребление римских цифр.

При записи десятичных дробей целая часть числа от дробной должна отделяться запятой (например: 15,6 тыс. руб., 18,5 м 2).

Сокращение ученых степеней и званий производится следующим образом: доктор исторических наук – д-р. ист. наук, кандидат исторических наук – канд. ист. наук, профессор – проф., доцент – доц. , старший преподаватель – ст. преп, ассистент – асс.

Изложение материала в курсовой работе необходимо осуществлять последовательно и логично. Все главы должны быть связаны между собой. Следует обращать особое внимание на логические переходы от одной главы к другой, от параграфа к параграфу, а внутри параграфа – от раскрытия одного вопроса к другому. Абзацы следует выделять каждый раз, когда меняется тема изложения и начинается новый смысловой фрагмент текста.

Абзацы в одну или две строки, как и абзацы, длиной в страницу и более, затрудняют восприятие мыслей автора.

Структура курсовой работы

Содержание всех основных разделов курсовой работы:

После титульного листа помещается содержание, в котором приводятся все заголовки курсовой работы и указываются страницы, с которых они начинаются.

Заголовки глав и параграфов в оглавлении должны точно повторять заголовки в тексте.

Введение – вступительная часть курсовой работы, в которой необходимо:

обосновать актуальность разрабатываемой темы; –

назвать основную цель работы и подчиненные ей задачи, решение которых связано с реализацией поставленной цели; –

определить границы исследования (объект, предмет);–

указать методологические основы (избранные научные методы) исследования; –

представить степень изученности проблемы; –

выделить научную новизну; –

отметить практическую значимость исследования; –

дать краткое описание структуры курсовой работы. –

Введение должно начинаться с обоснования актуальности выбранной темы курсовой работы.

Освещение актуальности должно быть аргументированным, но немногословным, поэтому начинать ее описание издалека нет необходимости. При определении актуальности можно отметить, что тема либо ее определенные аспекты недостаточно изучены или совсем не изучены, и объяснить почему.

Обоснование актуальности можно начинать словами: «Актуальность темы очевидна и обусловлена рядом причин…», «актуальность данной работы обусловлена большим интересом к …..» и т.п.

Цель курсовой работы – представление конечного результата исследования, то, что предполагается достичь в конечном итоге. Формулировка цели обязательно должна согласовываться с названием работы. Наиболее распространенные фразы и словосочетания в формулировке цели исследования: «изучить…», «исследовать…», «рассмотреть…» и т.д. Для достижения поставленной цели следует решить ряд задач, которые должны быть сформулированы во введении. Это обычно делается в форме перечисления, используя ряд стандартных глаголов: «изучить…», «проанализировать….», «рассмотреть…», «выявить…», «определит…», «разработать…» и т.п.

Перечень поставленных задач должен быть согласован с содержанием и структурой курсовой работы. Формулировку задач необходимо осуществлять как можно более тщательно, поскольку описание их решения должно составить содержание глав работы.

Обязательным элементом введения является формулировка объекта и предмета исследования.

Объект и предмет исследования как категория научного процесса соотносятся между собой как общее и частное.

Объект исследования – это процесс или явление, порождающее проблемную ситуацию, носитель рассматриваемой проблемы, то, на, что направлена исследовательская деятельность.

Предмет исследования – это то, что находится в границах выбранного объекта исследования, конкретная часть объекта. Именно на предмет исследования направлено основное внимание обучающегося, именно предмет определяет тему курсовой работы.

Далее во введении определяются методологические основы исследования. Здесь указываются те или иные применяемые в работе методы, принципы, подходы, с помощью которых решаются поставленные исследовательские задачи.

Практическая значимость исследования заключается в возможности использовать, полученные результаты в преподавательской работе в общеобразовательной школе.

В заключительной части введения раскрывается структура курсовой работы, т.е. дается перечень ее структурных элементов.

ПРИМЕР. Курсовая работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников и литературы, приложений.

За введением следует основная часть курсовой работы (2 главы основной части с наличием параграфов).

Содержание глав основной части должно точно соответствовать теме курсовой работы или и полностью ее раскрывать. Названия глав и параграфов не должны совпадать с названием темы курсовой работы. Недопустимо выделение только 1 параграфа в главе. В каждой главе должно быть не менее 2 параграфов.

При этом не допускается простое переписывание текста из учебников или другой литературы. Должна быть произведена самостоятельная аналитическая обработка материала.

Каждая глава должна заканчиваться аргументированными выводами, подводящими итог исследованию вопроса. Текст выводов по главам не должен дословно повторяться в заключении. Абзацы следует выделять каждый раз, когда меняется тема изложения и начинается новый смысловой фрагмент текста.

Абзацы в одну или две строки, как и абзацы, длиной в страницу и более, затрудняют восприятие мыслей автора.

Следует придерживаться определенных правил к употреблению цитат. Цитаты должны быть точными и достаточно короткими. Недопустимо применение цитат без ссылки на автора.

Завершает курсовую работу заключение, которое содержит окончательные выводы, характеризующие итоги работы студента в решении поставленных во введении задач.

Далее следует список использованных источников и литературы, который составляет одну из существенных частей исследования и показывает самостоятельную творческую работу автора.

Не следует включать в библиографический список те работы, на которые нет ссылок в тексте курсовой работы, и которые фактически не использовались в ней. Рекомендуемое количество использованных исторических источников и публикаций в списке – не менее 20 наименований для курсовых работ бакалавров, не менее 30 – для магистров.

При оформлении списка должна быть использована сквозная нумерация источников и литературы. Список использованных источников и литературы должен иметь рубрикацию. В первый раздел (I. Источники) включаются использованные в работе исторические источники. Во второй раздел (II. Литература) помещаются статьи, монографические исследования, учебные пособия, авторефераты диссертаций и т.д.

Все источники и литература даются в алфавитном порядке.

В приложения выносятся все материалы вспомогательного или дополнительного характера. Это могут быть копии подлинных документов, выдержки из отдельных материалов, статистические данные, таблицы, иллюстрации, планы и разрезы и т.д. По форме они могут представлять собой текст, таблицы, графики, карты.

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ

Курсовая работа (далее сокращенно – КР) оформляется в виде текста принтерной печатью на одной стороне листа белой бумаги формата А4.

Текст на листе должен иметь книжную ориентацию. Альбомная ориентация допускается только для таблиц и схем приложений. Текст должен быть оформлен в текстовом редакторе Microsoft Office Word с соблюдением следующих требований:

Формат шрифта Times New Roman.

Шрифт основного текста обычный, размер 14 (кегль) пт. Для сносок – 11 (кегль) пт.

Шрифт заголовков глав – полужирный и прописными буквами, размер 14 (кегль) пт.

Шрифт заголовков параграфов – полужирный, 14 (кегль) пт.

Межсимвольный интервал – обычный.

Межстрочный интервал – полуторный (1,5).

Межстрочный интервал ссылок – одинарный (1).

Абзацный отступ – 1,25 см.

Текст должен быть выровнен по ширине страницы. Заголовки выравнивают по центру.

Необходимо придерживаться следующих размеров полей: – слева – 30 мм – справа – 15 мм – сверху – 20 мм – снизу – 20 мм

Расстояние между словами, условными обозначениями и числами в строке текста должно составлять один пробел.

Страницы курсовой работы нумеруются арабскими цифрами с соблюдением сквозной нумерации по всему тексту.

Титульный лист включается в общую нумерацию страниц, но на нем номер не проставляется.

Нумерация начинается со второй (2) страницы (с раздела «Оглавление»).

Иллюстрации и другие приложения включаются в общую нумерацию страниц.

Номера страниц размещаются в нижней части листа справа без кавычек, дефисов и других знаков препинания.

Включение в текст КР иллюстраций, таблиц, схем и прочих вставок не допускается. Они могут помещаться в приложении.

Заголовки составных частей работы (содержание, введение, главы, параграфы, заключение) следует располагать в середине строки без точки в конце, без подчеркивания. Перенос слов в заголовках не допускается.

Все структурные части КР (за исключением параграфов) начинаются с новой страницы

Титульный лист

Титульный лист является первой страницей курсовой работы, на которой размещается следующая информация: наименование ведомства, высшего учебного заведения, института (факультета), кафедры; направление и профиль подготовки; фамилия, имя, студента; название работы; фамилия и инициалы, ученая степень и звание научного руководителя; дата представления, защиты, допуск научного руководителя к защите, оценка; название города и год написания работы. Этот лист заполняется по строго определенным правилам.

Содержание

Заголовки структурных частей курсовой работы («СОДЕРЖАНИЕ», «ВВЕДЕНИЕ», «ГЛАВА», «ЗАКЛЮЧЕНИЕ», «СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ», «ПРИЛОЖЕНИЕ») печатают заглавными прописными буквами полужирным начертанием посередине листа с новой страницы.

Заголовки параграфов печатаются строчными буквами (кроме первой заглавной) полужирным начертанием с абзацного отступа. Точку в конце заголовка не ставят.

Если заголовок состоит из двух или более предложений, их разделяют точкой.

Подчеркивания и переносы слов в заголовках не допускаются.

Не рекомендуется размещать заголовки параграфов в нижней части страницы, если на ней не более 3-х строк последующего текста.

Между заголовком главы и параграфа оставляют одну пустую строку.

Заголовки в содержании должны полностью соответствовать заголовкам в тексте. Слово «стр.» не пишут.

Главы нумеруются арабскими цифрами со словом «ГЛАВА 1 … », параграфы нумеруются арабскими цифрами без слов «параграф».

Нумерация параграфа состоит из номера главы и номера параграфа, разделённых точкой.

В конце номера ставится точка. Например, 2.3. обозначает, что данный заголовок относится к третьему параграфу второй главы. Все структурные части работы (кроме введения, заключения, списка источников и литературы, приложения) нумеруются.

Текстовая часть работы

Заголовки в тексте начинаются с нового листа и пишутся прописными буквами (выравнивание по центру) полужирным шрифтом, размер 14 (кегль).

Высота цифр и букв в наименовании должна быть одинаковой. Названия параграфов начинаются с прописной буквы, далее пишутся строчными буквами, также по центру, полужирным шрифтом.

Точка в конце названия главы и подраздела не ставится.

Используется полуторный (1,5) межстрочный интервал.

Заголовки глав снизу отделяются от названия заголовка параграфа одним дополнительным пробелом.

Параграфы внутри главы отделяются друг от друга двумя интервалами и, как указывалось выше, продолжаются по тексту (без нового листа).

Правильное оформление сносок – важнейшая составляющая курсовой работы.

На все цитаты и материалы, взятые из различных источников, обязательно должны приводиться сноски (ссылки) с указанием автора, названия цитируемого источника, года издания и страницы.

Сноски показывают, откуда автор взял тот или иной фактический материал. Обязательны сноски при цитировании (цитаты «берутся» в кавычки), при приведении чьего-то мнения в пересказе, при упоминании мнения того или иного автора, при цитирование или пересказе конкретных документов, при приведении цифровых данных, малоизвестных фактов и т.п. Технические требования: сноски должны быть внутритекстовыми [11, с. 6].

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Студент может претендовать на положительную оценку курсовой работы при доле авторского текста не менее 70%.

Оценка выставляется по пятибалльной системе с учетом:

– текста курсовой работы, объема литературы, количества проанализированного фактического материала, глубины и результативности анализа, умения сформулировать основные положения;

– умения излагать содержание работы при защите, степени владения материалом, умения вести дискуссию по теме;

При проведении процедуры защиты курсовой работы дополнительно следует опираться на дополнительные критерии оценок:

«Отлично» – курсовая работа написана на актуальную тему и отражает творческую самостоятельность автора, умение применять теоретические знания при анализе материала; содержит оригинальные наблюдения; правильно оформлена; доклад студента и его ответы на поставленные вопросы являются исчерпывающими и содержательными

. «Хорошо» – курсовая работа отражает хороший уровень теоретических знаний выпускника и умение исследовать практический материал, но при этом в работе имеются отдельные недочеты; доклад студента и его ответы на поставленные вопросы являются недостаточно полными и убедительными.

«Удовлетворительно» – курсовая работа содержит недочеты в оформлении текста; имеются замечания членов комиссии по теоретической или исследовательской главе; доклад и ответы студента на вопросы являются неполными и схематичными нарушают логику изложения.

«Неудовлетворительно» – курсовая работа содержит серьезные недочеты в содержании оформлении текста; доля авторского текста менее 70%, доклад студента является неполным и нарушает логику изложения; ответы на вопросы отсутствуют либо даются не по существу.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.АКМУЛЛЫ

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Уфа 2018

Рекомендации составлены на основе государственных и отраслевых стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу, а также на основе документов, регламентирующих издательскую деятельность в вузе, на основе нормативных требований к итоговой государственной аттестации выпускников. Излагаются требования к компьютерному набору, правила оформления рукописи и ее документального сопровождения. Приводятся образцы оформления титульного листа ВКР, бланков сопроводительной документации, примеры библиографических записей и общепринятых сокращений слов и словосочетаний.

Унификация требований к оформлению ВКР отвечает требования системы менеджмента качества образовательного процесса, реализуемой БГПУ им.М.Акмуллы.

Предназначены для студентов, преподавателей, деканов и директоров институтов. Могут быть полезны также при написании рефератов, курсовых работ и различной документации.

Содержание

1. ОФОРМЛЕНИЕ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1.1. Общие требования

Выпускная квалификационная работа представляется в твердом переплете. Текст должен быть набран на компьютере и отпечатан на стандартных листах белой бумаги формата А4 (210х297 мм).

Текст набирается в редакторе MS Word. При наборе рекомендуется использовать гарнитуру шрифта Times New Roman. Размер основного шрифта – 14 пт, вспомогательного (для сносок, таблиц) – 12 пт, межстрочный интервал – 1,5. Поля: левое – 30 мм, правое – 15 мм, верхнее – 20 мм, нижнее – 20 мм. Наименование разделов, глав, параграфов должны быть краткими.

Все страницы ВКР нумеруются по порядку от титульного листа до последней страницы. Первой страницей считается титульный лист, но на нем цифра 1 не ставится, на следующей странице (вслед за титульным листом обычно располагается содержание) проставляется цифра 2 и т.д., т.е. страницы выпускной квалификационной работы нумеруются арабскими цифрами нормальным шрифтом № 14 с соблюдением сквозной нумерации по всему тексту. Номера страниц проставляются внизу в центре страницы без точки в конце (меню – вставка – номер страницы). Иллюстрации, таблицы и схемы, расположенные на отдельных листах внутри текста, входят в общую нумерацию.

1.2. Правила компьютерного оформления текста

Материал работы формируется в одном файле MS Word.

Перенос слов в заголовках не допускается. Наименование разделов (введение, содержание, заключение, список литературы, приложения) печатаются в виде заголовков первого порядка, без точки в конце и с новой страницы. Во избежание смещения начала главы рекомендуется перед заголовком ставить разрыв страницы (в меню Вставка – разрыв – новую страницу).

Текст набирается с соблюдением следующих правил:

1) формирование абзацев выполняется через команду Формат - Абзац;

2) слова разделяются только одним пробелом;

3) перед знаком препинания пробелы не ставятся, после знака препинания – один пробел;

4) при наборе должны различаться тире (длинная черточка) и дефисы (короткая черточка). Тире отделяется пробелами, а дефис нет.

5) после инициалов перед фамилией, внутри сокращений, перед сокращением г.– указанием года и т.п. ставится неразрывный пробел (Shift-Ctrl-пробел), для того чтобы не разрывать цельность написания, например: А.С. Пушкин, 1998 г., т. д., т. е.;

6) основной текст выравнивается по ширине, с отступом первой строки 1,25 см;

7) точка в конце заголовка не ставится; рекомендуется смысловое деление заголовка по строкам;

8) шрифтовые выделения внутри текста должны соответствовать следующей иерархии: строчной полужирный прямой – строчной полужирный курсив – строчной светлый курсив;

9) таблицы набираются кеглем 12 и помещаются в основной текст;

10) цитаты, прямую речь, иносказательные выражения лучше помещать в двойные кавычки;

11) при трехуровневой рубрикации (главы – параграфы – пункты) заголовки первого уровня (введение, содержание, названия глав, заключение, список литературы, приложения) набираются прописными полужирными буквами (шрифт 14), второго (названия параграфов) – строчными полужирными (шрифт 14), третьего (названия в пунктах параграфа) – строчным полужирным курсивом (шрифт 14). При двухуровневой рубрикации заголовки первого уровня (названия глав и пр.) – строчными полужирными (шрифт 14), второго (названия параграфов) – полужирным курсивом (шрифт 14). Выравнивание заголовков – по центру. Нумеровать главы, параграфы, пункты в тексте работы следует арабскими цифрами.

Пример:

Глава 2. СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕРРИТОРИИ **2.1. Население** *2.1.1. Возрастной состав*

При сочетании полужирных и светлых шрифтовых выделений следует иметь в виду, что полужирный строчной прямой «старше», «главнее» полужирного строчного курсива, который, в свою очередь, «главнее» светлого строчного курсива. Эту иерархию особенно следует учитывать при внутритекстовой рубрикации, по-разному выделяя понятия, определения, термины, примеры, логические усиления и т.п.

Не допускаются:

- интервалы между абзацами в основном тексте;
- перенос слов в заголовках, а также отрыв предлога или союза от относящегося к нему слова.
- формирование отступов с помощью пробелов;
- «ручной» перенос слов с помощью дефиса;
- внутритекстовые выделения подчеркиванием и прописными буквами;
- использование разрывов разделов (глав), кроме случаев смешанных (книжных и альбомных) ориентаций листов;
- выделение текста подчеркиванием.

1.3. Числа и знаки в тексте

Однозначные числа не при единицах физических величин, если они встречаются в тексте в косвенных падежах, рекомендуется писать в буквенной, а не в цифровой форме (например, «одного», «двух» и т.д.).

Крупные круглые числа (тысячи, миллионы, миллиарды) рекомендуется писать в буквенно-цифровой форме – в виде сочетания цифр с сокращенными обозначениями: 20 тыс., 20 млн., 20 млрд.

В числах с десятичными дробями целое число отделяют от дроби запятой, а не точкой. Например: 6,5 или 8,12.

Простые дроби в тексте рекомендуется писать через косую линейку: 1/5, 2/3 и т.д.

Для обозначения интервала значений в технических и естественнонаучных изданиях предпочтительным является стандартный знак многоточие (...) между числами в цифровой форме, в гуманитарных и экономических – тире или предлоги: от (перед первым числом) и до (перед вторым).

При указании пределов значений единицу измерения приводят один раз. Например: 35–40 мм, от 5 до 6 мм.

Если однозначные порядковые числительные следуют одно за другим, то они могут быть даны цифрами, причем падежное окончание (наращение) ставят только при последней цифре. Например: 3, 5, 7 и 8-я позиции, но 4-я и 10-я.

Сложные прилагательные, первой частью которых является числительное, а второй – метрическая мера, процент или другая единица величины, следует писать так: 5-литровый, 20%-ный, 10-тонный.

Падежное окончание в порядковых числительных, обозначенных арабскими цифрами, должно быть однобуквенным, если последней букве числительного предшествует гласная (5-й, 7-е, 10-м), и двухбуквенным, если последней букве числительного предшествует согласная (5-го, 50-му).

Математические обозначения =, ~, <, > и др. допускается применять только в формулах. В тексте их следует передавать словами равно, приблизительно, меньше, больше. Например, нельзя писать ... > 5 м, нужно: больше 5 м.

1.4. Сокращения в тексте

Вольные сокращения слов не допускаются, примеры принятых сокращений слов приводятся в справочной литературе.

Обязательно сокращают стоящие перед цифрой слова, обозначающие ссылку в тексте на тот или иной его элемент: том – т., часть – ч., выпуск – вып., рисунок – рис., издание – изд., таблица – табл., глава – глав., раздел – разд., параграф – §, пункт – п.

Указанные ниже ученые степени, должности или профессии приводят в сокращенном виде: академик – акад., технических наук – техн. н., член-корреспондент – чл.-корр., экономических – экон., профессор – проф., философских – филос., филологических – филол., доцент – доц., исторических – ист., доктор – д-р, физико-математических – физ.-мат., кандидат – канд.

Сокращают названия организаций, учреждений, а также термины, принятые в научной и технической литературе (сокращения не делают в начале фразы): БГПУ, ВИНИТИ, СВЧ, КПД, ЭДС, термо-ЭДС, ИК-диапазон, МОП-структура и т.п.

Сокращают поясняющие слова: то есть – т.е., и прочие – и пр., и тому подобное – и т.п., смотри – см., и другие – и др., сравни – ср.

Только в словарях и в справочниках допускаются следующие сокращения: так называемый – т.н., около – ок., так как – т.к., уравнение – ур-ние, например – напр., формула – ф-ла.

1.5. Рисунки

Рисунки в ВКР могут быть двух видов: отсканированные и построенные с использованием графического редактора.

Общими для тех и других являются следующие требования:

1. Площадь изображения вместе с подрисуночной подписью не должна выходить за поля основного текста.

2. Все рисунки должны быть выполнены в едином масштабе или допускать приведение к нему, быть соизмеримы друг с другом.

3. Шрифт, которым выполняются надписи на рисунках, не должен быть крупнее 11-го и мельче 7-го.

Для сканирования следует использовать только оригиналы (первоисточники) рисунков: фотографий, сложных чертежей, диаграмм и т.п. Сканирование с ксерокопий и других вторичных документов не допускается.

Штриховые рисунки – графики, структурные и функциональные схемы – должны строиться только в графическом редакторе в формате JPEG с разрешением 300 dpi. Допустимы форматы TIF (TIFF), WMF, BMP. Другие форматы не используются.

Для того чтобы рисунки, выполненные средствами Word, при попытке открыть их не «разваливались» на составляющие, они должны быть сгруппированы.

Количество рисунков в работе диктуется целесообразностью. Их следует располагать непосредственно после текста, в котором они упоминаются впервые, а при невозможности размещения на данной странице переносятся на следующую.

Обозначения, термины и другие надписи на рисунках должны соответствовать тексту и подрисуночным подписям. Текст, связанный с рисунком (надписи и подписи), набирается 12-м шрифтом. Текстовые надписи на рисунках следует заменить цифровыми обозначениями, кроме надписей, обозначающих среды и направления (Вода, Газ, К выходу и т.п.). Текстовые надписи начинают с прописной буквы, сокращения в них не допускаются. Цифровые обозначения раскрываются в подрисуночных подписях.

На рисунках используют следующие виды условных обозначений:

1. *Арабские цифры*. Ими обозначают детали изображения, значения (названия) которых расшифровывают в экспликации подписи или в тексте, проставляя после соответствующих слов.

2. *Римские цифры*. Ими обозначают части изделий, зоны действия, распространения.

3. *Прописные буквы латинского алфавита*. Ими обозначают точки геометрических фигур, узлы изделий, вершины углов, электроизмерительные приборы и т.п.

4. *Прописные буквы русского или латинского алфавита с арабскими цифрами*. Ими обозначают элементы электрических схем.

5. *Строчные буквы латинского и греческого алфавитов*. Первыми обозначают отрезки геометрических фигур, вторыми – углы на этих фигурах.

Если все позиции рисунка раскрываются в тексте, а развернутые подписи отсутствуют, то цифры на рисунке ставят в порядке упоминания их в тексте. Если же позиции раскрываются лишь в подрисуночной подписи, то на рисунке их нумеруют по часовой стрелке. При этом по всей рукописи должно быть выдержано единообразие.

Нумерация рисунков сквозная.

Полную подрисуночную подпись составляют следующие элементы:

1) сокращение «Рис.» и его порядковый номер, на который обязательно должна быть ссылка в тексте;

2) собственно подпись;

3) экспликация (если нужно), т.е. пояснение деталей (частей) рисунка.

Сокращение с порядковым номером без подписи нельзя дополнять экспликацией.

Правильно:

Рис. 2: Строение излома: *1* – поверхность усталостного разрушения с бороздками; *2* – зона долома.

Если работа содержит всего один рисунок, то номер ему не присваивается, сокращение «рис.» под ним не пишется, а упоминание его в тексте формулируется так: «На рисунке приведена зависимость...» или «см. рисунок».

Между номером рисунка и тематической частью подписи ставится точка, после тематической части перед экспликацией (если она есть) – двоеточие, между элементами экспликации – точка с запятой. В конце подрисуночной подписи точка не ставится.

1.6.Таблицы

Таблицей называют цифровой и текстовой материал, сгруппированный в определенном порядке в горизонтальные строки и вертикальные графы (столбцы), разделенные линейками. Верхнюю часть таблицы называют головкой (чаще употребляют слово «шапка»), левую графу — боковиком.

Таблицы печатают при их первом упоминании. Небольшие таблицы следуют за абзацем, в котором была ссылка на них. Таблицы, занимающие больше половины страницы, – на следующей отдельной странице (страницах). Все таблицы в рукописи должны быть пронумерованы. Порядковая нумерация таблиц должна быть сквозной. Ссылки в тексте на таблицы дают в сокращенном виде, например: **табл. 1**, **табл. 5**. Над таблицей в правом верхнем углу обычным шрифтом пишут полностью: **Таблица 3**, а по центру – ее название (строчном полужирным), на последующих страницах – **Продолжение табл. 3**, на последней – **Окончание табл. 3**.

Пример:

Таблица 3

Предельно допустимые концентрации или уровни некоторых суперэкотоксикантов в природных средах

Вещество	Вода, мг/л	Воздух, мг/м^3	Почва, мг/кг
Бенз(а)пирен	$5*10^{-6}$	$1*10^{-6}$	0,02
ДДТ	0,1	$5*10^{-4}$	0,1
ГХЦГ	0,02	0,03	0,1
Ртуть	$5*10^{-4}$	$3*10^{-4}$	2,1
Кадмий	0,001	$3*10^{-4}$	-
Свинец	0,03	$3*10^{-4}$	32

Если таблица в работе всего одна, ее не нумеруют и слово **Таблица** над ней не пишут: читатель и так видит, что перед ним таблица.

Сокращения слов в таблицах, кроме общепринятых, не допускаются. В головках таблиц и в боковике текст печатают горизонтально. Таблицы должны быть обязательно разлинованы по вертикали.

На каждую таблицу в тексте обязательно делается ссылка. Она должна органически входить в текст, а не выделяться в самостоятельную фразу, повторяющую тематический заголовок таблицы. Поэтому, например, вариант «Емкость варикапа зависит от напряжения (табл. 8)» предпочтительнее варианта «Зависимость емкости варикапа от напряжения показана в табл. 8».

Таблицы можно давать с заголовками и без заголовков. Заголовок необходим во всех случаях, когда таблица имеет самостоятельное значение и читатель может обратиться к ней помимо текста. Без заголовков дают таблицы вспомогательного значения.

Головки таблиц должны состоять из заголовков к каждому столбцу, не исключая боковика, т.е. в верхнем левом углу таблицы обязательно помещается заголовок к боковику. Ячейка головки над боковиком не должна оставаться пустой. Заголовок следует формулировать кратко и в единственном числе. Вместо слов можно давать буквенные обозначения (например, d, мм; V, В; Р, Вт).

Диагональные линейки в таблицах не допускаются.

Столбцы (графы) и строки в таблицах нумеруют только в том случае, если в этом есть необходимость (например, при переносе длинной таблицы или когда в тексте есть ссылки на отдельные столбцы или строки).

Повторяющийся буквенный (но не цифровой) текст, если он состоит из одного слова, может быть заменен кавычками. Если повторяющийся текст содержит более одного слова, то при первом повторении его заменяют словами «То же», при следующих повторениях под словами «То же» ставят две пары кавычек. Пропуски в столбцах (за отсутствием данных) не оставляют пустыми, а заполняют знаком тире.

Числовые данные в таблицах не сопровождают единицами величин, а выносят последние в текст боковика, головки или общего названия таблицы.

Примечания и сноски к таблицам печатают непосредственно под ними, более мелким шрифтом (кегль 12), чтобы отделить текст сноски или примечания от последующего основного текста. Сноски к цифрам обозначаются только звездочками.

1.7. Формулы

Формулы набираются только в редакторе формул Equation 3.0, который на панели управления выглядит как $\sqrt{a}$. Если его там нет, необходимо выполнить следующие действия: *Вид – Панель инструментов – Настройка – Команды – Вставка –* $\sqrt{a}$ (редактор формул). Его следует выделить и вынести на панель управления.

При наборе формул рекомендуется использовать следующие размеры шрифтов: основной – 11, крупный индекс – 8, мелкий индекс – 7, крупный символ – 14, мелкий символ – 9.

Для того чтобы соблюсти все правила набора формул (латинские буквы – курсивом, греческие и русские – прямым, как в основном тексте, так и в индексах), необходимо в *Редакторе формул* использовать соответствующие стили: *Математический* – для латинских и греческих букв, *Текст* – для русских.

Прямым шрифтом также набираются:

– cos, sin, tg и другие тригонометрические функции;

– max, min, opt, lim, log, lg, const, det, exp;

– числа подобия – Ar (Архимеда), Bi (Био), Bo (Больцмана), Eu (Эйлера), Fo (Фурье), Gr (Грасгофа), M (Маха), Nu (Нуссельта), Pr (Прандтля), Re (Рейнольдса), St (Стантона) и др.;

– химические элементы и соединения;

– русские наименования единиц физических величин (м, кг, Вт, Ом).

Наиболее важные, а также длинные и громоздкие формулы выключают в отдельные строки. Так же располагают и все нумерованные формулы.

Экспликацию (расшифровку приведенных в правой и левой частях формулы буквенных обозначений величин) следует размещать в подбор, за словом «где» (без двоеточия после него). В конце каждой расшифровки ставят точку с запятой. Не следует начинать каждую расшифровку с новой строки, так как это снижает емкость листа. При большом числе формул с повторяющимися обозначениями целесообразно поместить в начале работы список обозначений с их расшифровкой и в экспликацию повторяющиеся обозначения не включать.

Перенос в формулах допускается делать на знаках соотношений, на отточии, на знаках сложения и вычитания и, в последнюю очередь, на знаке умножения в виде косого креста. Перенос на знаке деления не допускается. Математический знак, на котором прерывается формула, обязательно должен быть повторен в начале второй строки.

Нумеровать следует только наиболее важные формулы, на которые имеются ссылки в последующем тексте. Несколько небольших формул, составляющих единую группу, следует помещать в одну строку и объединять общим номером.

При нумерации формул, расположенных отдельными строками, номер помещают против середины группы формул. В работах, где нумеруется ограниченное число формул, рекомендуется использовать сквозную нумерацию. При ссылках на какую-либо формулу ее номер ставят точно в той же графической форме, что и после формулы, т.е. арабскими цифрами в круглых скобках. Например, «из уравнения (5) следует ...» и т.п.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1.8. Приложения

Если работа включает материалы, к которым читатель будет постоянно обращаться за справками, их желательно вынести в приложения за текст, где их проще и быстрее найти (таблицы количественных данных, стандартных показателей, картографический материал, иллюстративный материал – графики, схемы, диаграммы, фотографии, ксерокопии архивных документов и т.п.). Эти данные в работе выполняют справочно-вспомогательную роль.

Приложения помещаются после библиографического списка и не учитываются в общем объеме работы.

1.9. Содержание

Содержание раскрывает структуру работы и размещается в начале ВКР после титульного листа.

1.10. Ссылки на литературные источники

На все литературные источники (книги, статьи, ГОСТы, картографические материалы, архивные материалы, электронные ресурсы и т.п.) использованные (а также упоминаемые) при написании выпускной квалификационной работы даются ссылки в тексте. Ссылка приводится после упоминания автора использованной работы, цитирования или приведения данных из источника. Ссылка оформляется в круглых скобках, с указанием фамилий автора (авторов) или названия работы (коллективная монография, энциклопедические издания и т.п.) и года издания. При упоминании автора использованной работы в самом тексте в ссылке приводится только год издания. При упоминании зарубежного автора в ссылке приводится оригинальное написание фамилии автора и год издания.

Примеры оформления ссылок:

В.В. Сафонова отмечает, что проблемное обучение иностранному языку можно определить, как деятельность учителя по созданию и использованию на различных стадиях обучения иноязычных заданий [Сафонова 2009: 68].

Одним из первых учет ловушками применил Ч. Элтон и др. [Elton 1931], изучая в течение трех лет динамику численности мышей и полевок в окрестностях Оксфордского университета.

1.11. Список литературы (правила составления)

Список литературы – обязательный элемент любой исследовательской работы. В выпускных квалификационных работах в список следует включать всю использованную студентом литературу, на которую имеются ссылки в тексте. Список источников озаглавливается как **Литература** и помещается в конце работы перед **Приложением** (если в приложении нет ссылок на литературные источники) или после Приложения (если в последнем имеются ссылки на использованную литературу). Литературные источники располагаются в алфавитном порядке и нумеруются, сначала все издания на русском языке, затем – на иностранном.

2. ПРИМЕРЫ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ЗАПИСЕЙ

КНИГИ

ОДНОТОМНЫЕ ИЗДАНИЯ

Семенов, В. В. Философия: итог тысячелетий. Философская психология [Текст] / В. В. Семенов ; Рос. акад. наук, Пущин. науч. центр, Ин-т биофизики клетки, Акад. проблем сохранения жизни. – Пущино : ПНЦ РАН, 2000. – 64 с. – Библиогр.: с. 60-65. – ISBN 5-201-14433-0.

Ерина, Е. М. Обычаи поволжских немцев [Текст] = Sitten und Brauche der Wolgadeutchen / Екатерина Ерина, Валерия Салькова ; худож. Н. Стариков ; Междунар. союз нем. культуры. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Готика, 2002. – 102 с. : ил. – На обл. авт. не указаны. – Текст парал. рус., нем. – Библиогр.: с. 92-93. – ISBN 5-7834-0066-1.

Золотой ключик [Текст] : сказки рос. писателей : [для мл. и сред. шк. возраста] / сост. И. Полякова ; худож. В. Бритвин, Н. Дымова, С. Муравьев. – М. : Оникс, 2001. – 381 с. : ил. – (Золотая библиотека). – Содерж. авт.: А. Н. Толстой, Б. В. Заходер, А. М. Волков, Е. С. Велтистов, К. Булычев. – ISBN 5-249-00334-6 (в пер.).

Законодательные материалы

Запись под заголовком

Российская Федерация. Законы. Семейный кодекс Российской Федерации [Текст] : [федер. Закон : принят Гос. Думой 8 дек. 1995 г. : по состоянию на 3 янв. 2001 г.]. – СПб. : Victory : Стаун-кантри, 2001. – 94 с. – На тит. л.: Проф. юрид. системы «Кодекс». – ISBN 5-7931-0142-Х.

Запись под заглавием

Гражданский процессуальный кодекс РСФСР [Текст] : [принят третьей сес. Верхов. Совета РСФСР шестого созыва 11 июня 1964 г.] : офиц. Текст : по состоянию на 15 нояб. 2001 г. / М-во юстиции РФ. – М. : Маркетинг, 2001. – 159 с. – ISBN 5-94462-191-5.

Стандарты

Запись под заголовком

ГОСТ 7.53-2001. Издания. Международная стандартная нумерация книг [Текст]. – Взамен ГОСТ 7.53-86 ; введ. 2002-07-01. – Минск : Межгос. совет по стандартизации, метрологии и сертификации ; М. : Изд-во стандартов, сор. 2002. – 3 с. – (Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу).

Запись под заглавием

Издания. Международная стандартная нумерация книг [Текст] : ГОСТ 7.53-2001. – Взамен ГОСТ 7.53-86 ; введ. 2002-07-01. – Минск : Межгос. совет по стандартизации, метрологии и сертификации ; М. : Изд-во стандартов, сор. 2002. – 3 с. – (Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу).

Сборники без общего заглавия

Гиляровский, В. А. Москва и москвичи [Текст] ; Друзья и встречи ; Люди театра / В. А. Гиляровский ; вступ. ст. и примеч. А. Петрова ; худож. И. Лыков. – М. : ЭКСМО-пресс, 2001. – 638 с. : ил. – (Русская классика). – ISBN 5-04-008668-7 (в пер.).

Носов, Н. Н. Приключения Незнайки и его друзей [Текст] : сказоч. повести / Николай Носов. Остров Незнайки : повесть : [для детей] / Игорь Носов ; [к сб. в целом] худож. И. Панков. – М. : ЭКСМО-пресс, 2001. – 638 с. : ил. – Содерж.: Приключения Незнайки и его друзей ; Незнайка в Солнечном городе / Николай Носов. Остров Незнайки / Игорь Носов. – ISBN 5-04-008687-3 (в пер.).

МНОГОТОМНЫЕ ИЗДАНИЯ

Гиппиус, З. Н. Сочинения [Текст] : в 2 т. / Зинаида Гиппиус ; [вступ. ст., подгот. текста и коммент. Т. Г. Юрченко ; Рос. акад. наук, Ин-т науч. информ. по обществ. наукам]. – М. : Лаком-книга : Габестро, 2001. – (Золотая проза серебряного века). – На пер. только авт. и загл. серии. – ISBN 5-85647-056-7. (в пер.).

Т. 1 : Романы. – 367 с. – Библиогр. в примеч.: с. 360-366. – Содерж.: Без талисмана ; Победители ; Сумерки духа. – В прил.: З. Н. Гиппиус / В. Брюсов. – ISBN 5-85647-057-5.

Т. 2 : Романы. – 415 с. – Содерж.: Чертова кукла ; Жизнеописание в 33 гл. ; Роман-царевич : история одного начинания ; Чужая любовь. – ISBN 5-85647-058-3.

Отдельный том

Казьмин, В. Д. Справочник домашнего врача [Текст]. В 3 ч. Ч. 2. Детские болезни / Владимир Казьмин. – М. : АСТ : Астрель, 2002. – 503 с. : ил. – ISBN 5-17-011143-6 (АСТ) (в пер.).

ДЕПОНИРОВАННЫЕ НАУЧНЫЕ РАБОТЫ

Социологическое исследование малых групп населения [Текст] / В. И. Иванов [и др.] ; М-во образования РФ, Финансовая академия. – М., 2002. – 110 с. – Библиогр.: с. 108-109. – Деп. в ВИНИТИ 13.06.02, № 145432.

НЕОПУБЛИКОВАННЫЕ ДОКУМЕНТЫ

Отчеты о научно-исследовательской работе

Состояние и перспективы развития статистики печати Российской Федерации [Текст] : отчет о НИР (заключ.) : 06-02 / Рос. кн. палата ; рук. А. А. Джиго ; исполн.: В. П. Смирнова [и др.]. – М., 2000. – 250 с. – Библиогр.: с. 248-250. – Инв. № 756600.

Диссертации

Кашапова, Л. М. Моделирование и реализация непрерывного этномузыкального образования как целостной национально-региональной образовательной системы [Текст] : автореф. дис. … д-ра пед. наук : 13.00.01 : защищена 22.01.06 : утв. 15.07.06 / Кашапова Ляля Мухаметдиновна. – Уфа, 2006. – 48 с. – Библиогр.: с. 42-47.

Кудинов, И. В. Формирование личности будущего учителя как субъекта педагогической деятельности в системе заочно-дистанционного обучения [Текст] : дис. … канд. пед. наук : 13.00.08 : защищена 24.06.06 : утв. 15.02.07 / Кудинов Илья Викторович. – Уфа, 2006. – 214 с. – Библиогр.: с. 159-180.

ИЗОИЗДАНИЯ

Графика [Изоматериал] : нагляд. Пособие для для образоват. учреждений по предмету «культура Башкортостана» : [комплект репрод. / авт.-сост. Н. И. Оськина ; слайды Л. А. Черемохина ; пер. на башк. яз. М. С. Аминовой]. – Уфа : Демиург, 2001. – 1 папка (24 отд. л.) : цв. офсет. – (Изобразительное искусство Башкортостана ; вып. 5). – Подписи к ил. парал. рус., башк.

НОТНЫЕ ИЗДАНИЯ

Эшпай, А. Я. Квартет [Ноты] : для 2 скрипок, альта и виолончели / Андрей Эшпай. – Партитура и голоса. – М. : Композитор, 2001. – 34 с., 4 парт. (68 с. партий разд. паг.). – Тит. л. парал. рус., англ. – Н. д. 10350.

КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ИЗДАНИЯ

Европа. Государства Европы [Карты] : [физическая карта] / сост. и подгот. к печати ПКО «Картография» в 1985 г. ; ст. ред. Л. Н. Колосова ; ред. Н. А. Дубовой. – Испр. в 2000 г. – 1 : 5000000, 50 км в 1 см ; пр-ция норм. кон. равнопром. – М. : Роскартография, 2000. – 1 к. : цв., табл. ; 106х89 см.

АУДИОИЗДАНИЯ

Роман (иеромон.). Песни [Звукозапись] / иеромонах Роман ; исп. Жанна Бичевская. – СПб. : Центр духов. просвещения, 2002. – 1 электрон. опт. диск. – (Песнопения иеромонаха Романа ; вып. 3).

ВИДЕОИЗДАНИЯ

От заката до рассвета [Видеозапись] / реж. Роберт Родригес ; в ролях: К. Тарантино, Х. Кейтель, Дж. Клуни ; Paramount Films. – М. : Премьер –видеофильм, 2002. – 1 вк. – Фильм вышел на экраны в 1999 г.

ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРЫ

Ресурсы локального доступа

Русская драматургия от Сумарокова до Хармса [Электронный ресурс]. – М. : ДиректМедиа Паблишинг, 2005. – 1 электрон. Опт. диск (CD-ROM). – (Электронная библиотека ДМ ; № 47). – Систем. требования: IBM PC и выше, 16

Мб RAM, CD-ROM, SUGA, Windows 95/98/ME/NT/XP/2000. – ISBN 5-94865-073-1.

Ресурсы удаленного доступа

Российская государственная библиотека [Электронный ресурс] / Центр информ. технологий РГБ ; ред. Власенко Т. В. ; Web-мастер Козлова Н. В. – Электрон. дан. – М. : Рос. гос. б-ка, 1997. - . – Режим доступа: http://www.rsl.ru, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус., англ.

Василенко, Л. А. Информационная культура в контексте глобальных изменений [Электронный ресурс] / Л. А. Василенко, И. Н. Рыбакова. – Режим доступа : www. URL: http://spkurdyumov.narod.ru/D48VasilinkoRybakova.htm. - 11.12.2004 г.

СОСТАВНЫЕ ЧАСТИ ДОКУМЕНТОВ

СТАТЬИ

Составная часть книги

Богданов, А. Между стеной и бездной. Леонид Андреев и его творчество [Текст] : вступ. ст. / А. Богданов // Андреев, Л. Н. Собр. соч. : в 6 т. – М., 1990. – Т. 1. – С. 5-40.

Статья из собрания сочинений

Выготский, Л. С. История развития высших психических функций [Текст] / Л. С. Выготский // Собр. соч. : в 6 т. – М., 1995. – Т. 3: Проблемы развития психики. – С. 2-328.

Статья из сборника

Хайруллина, Р. Х. Национально-культурная семантика языковых единиц [Текст] / Р. Х. Хайруллина // Международные Акмуллинские чтения : материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. М. Акмулле (22-23 мая 2008 г.) / отв. ред. Н. М. Жанпеисова ; Актюбинский ун-т им. С. Баишева. – Актобе, 2008. – С. 275-277.

Статья из сериального издания

Асадуллин, Р. М. Профессионально-педагогическое образование: проблемы модернизации [Текст] / Раиль Мирваевич Асадуллин // Педагогический журнал Башкортостана. – 2008. - № 3 (16). – С. 5-8.

РАЗДЕЛ, ГЛАВА

Глазырин, Б. Э. Автоматизация выполнения отдельных операций в Word 2000 [Текст] / Б. Э. Глазырин // Office 2000 : 5 кн. в 1 : самоучитель / Э. М. Берлинер, И. Б. Глазырина, Б. Э. Глазырин. – 2-е изд., перераб. – М., 2002. – Гл. 14. – С. 281-298.

РЕЦЕНЗИИ

Гаврилов, А. В. Как звучит? [Текст] / Андрей Гаврилов // Кн. обозрение. – 2002. – 11 марта (№ 10/11). – С. 2. – Рец. на кн.: Музыкальный запас. 70-е : проблемы, портреты, случаи / Т. Чередниченко. – М. : Новое лит. обозрение, 2002. – 592 с.

3. ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.М.АКМУЛЛЫ»

ИНСТИТУТ ФИЛОЛОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И МЕЖКУЛЬТУРНЫХ КОММУНИКАЦИЙ

Кафедра методики преподавания ИЯ и 2ИЯ
Направление 45.03.02 Лингвистика
Профиль – Теория и методика преподавания иностранных зыков и культур
Курс IV, группа 401 Л
заочная форма обучения

КУСИМОВА ГУЛЬНАРА ХАРИСОВНА

ОБУЧЕНИЕ ЧТЕНИЮ НА ОСНОВЕ ПРОБЛЕМАТИЗАЦИИ ТЕКСТОВ НА СРЕДНЕМ ЭТАПЕ ОБУЧЕНИЯ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.п.н., профессор В.Ф. Аитов

Работа допущена к защите________________________
Заведующий кафедрой ___________________________
Дата представления______________________________
Дата защиты____________________________________
Оценка____
подпись научного руководителя

Уфа 2018

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ.М.АКМУЛЛЫ»

ЕСТЕСТВЕННО-ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра географии и
географического образования

Направление 050100 –
Педагогическое образование,
профиль «География»
Курс IV

ИВАНОВА СВЕТЛАНА ВИКТОРОВНА

ОСОБЕННОСТИ ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕРРИТОРИИ ПРОЕКТИРУЕМОГО ПРИРОДНОГО ПАРКА «ИРЕМЕЛЬ»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.г.н., проф. Р.Ш. Кашапов

Дата представления________________________________

Работа допущена к защите __________________________
дата и подпись заведующего кафедрой

Дата защиты______________________________________

Оценка____

Уфа 2018

Заведующему кафедрой

____

(название кафедры)

БГПУ им. М.Акмуллы

____

(Ф.И.О. заведующего, уч.степень)

студента (ки) ________________

____

(факультет, направлении/специальность)

____

(форма обучения)

____

(Ф. И.О. студента в родит.падеже)

ЗАЯВЛЕНИЕ.

Прошу закрепить за мной выпускную квалификационную работу на тему:____

____

____

____

____

(рабочее полное название темы)

Научный руководитель: ____

(фамилия, имя, отчество, должность, ученая степень, ученое звание)

Научный руководитель: _________________«Согласен»

(подпись)

Дата: ___________________

Подпись студента _______________________

(подпись)

Дата:____________________

Решение кафедры:

____

(утвердить, отклонить, доработать)

Зав. кафедрой___________________

(подпись)

Дата: ___________________________

Протокол № _____

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. АКМУЛЛЫ»
КАФЕДРА ___________________

4. ОБРАЗЦЫ СОПРОВОЖДАЮЩИХ ДОКУМЕНТОВ

3.1. Отзыв руководителя

О Т З Ы В Р У К О В О Д И Т Е Л Я

На работу студента____
выполненную на тему____
____
1. Актуальность работы____
____
____
2. Научная новизна работы____
____
3. Оценка содержания работы____
____
4. Положительные стороны работы_____________________________________
____
5. Замечания____
____
____
6. Рекомендации по внедрению результатов работы______________________
____
____
7. Рекомендуемая оценка____
8. Дополнительная информация для аттестационной комиссии
____
____
Научный руководитель____
____
(подпись) (фамилия, имя, отчество)
____
______
(ученая степень, звание, должность, место работы)

дата

3.2. Рецензия

РЕЦЕНЗИЯ

на выпускную квалификационную работу студента(ки)

____факультета

____

____

(фамилия, имя, отчество студента)

Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы, выполненную на тему:____

____

---

1. Актуальность, новизна исследования____________________________________

____

____

____

2 Оценка содержания работы____

____

____

____

3 Отличительные, положительные стороны работы___________________________

____

____

____

____

____

4. Практическое значение и рекомендации по внедрению

____

____

____

____

5 Недостатки и замечания по работе_______________________________________

____

____

6. Рекомендуемая оценка____

Рецензент___________________   _________________________

(подпись)   (фамилия, имя, отчество)

____

____

(ученая степень, звание, должность, место работы)

3.3. Заключение

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. АКМУЛЛЫ»
КАФЕДРА ___________________

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

Заведующего кафедрой ____

(фамилия, имя, отчество зав.кафедрой)

Квалификационная выпускная работа студента группы______________________

____

____

(фамилия, имя, отчество студента)

выполненная на тему____

____

____

в объеме_______________ с., с приложением __________с.

соответствует установленным требованиям и допускается кафедрой к защите.

Заведующий кафедрой

«_____ »________________20___ г.

Примеры принятых сокращений слов и словосочетаний по ГОСТ 7.12-93

Слово (словосочетание)	Сокращение	Условия применения
1	2	3
Автор	Авт.	
Автореферат	Автореф.	
Авторское свидетельство	А.с.	
Академик	Акад.	При фамилии или названии учреждения
Ассоциация	Ассоц.	
Библиотека	Б-ка	
Введение	Введ.	
Включительно	Включ.	
Вопросы	Вопр.	
Выпуск	Вып.	
Высший	Высш.	
Глава	Гл.	При цифрах и в примечаниях
Город	г.	При названии
Государственный	Гос.	
График	Граф.	
Депонированный	Деп.	
Дискуссия	Дискус.	
Диссертация	Дис.	
Доклад	Докл.	
Доктор	Д-Р	В названии ученой степени
Дополнение	Доп.	
Доцент	Доц.	При фамилии или названии учреждения
Ежедневный	Ежедн.	
Журнал	Журн.	
Копия	Коп.	
Лаборатория	Лаб.	
Лист.	л.	При цифрах и в примечаниях
Литература	Лит.	
Математический	Мат.	
Медицинский	Мед.	
Месяц	Мес.	
Механический	Мех.	
Министерство	М-во	
Младший	Мл.	
Научный	Науч.	
Национальный	Нац.	
Общество	О-во	

Около	ок.	При цифрах
Ответственный	Отв.	
Оформление	Оформ.	
Патент	пат.	
Перевод	Пер.	
План	Пл.	
Председатель	Пред.	При названии учреждения
Приложение	Прил.	
Примечание	Примеч.	
Продолжение	Продолж.	
Производственный	Произв.	
Профессор	Проф.	При фамилии или названия учреждения
Раздел	Разд.	При цифрах и в примечаниях
Республика	Респ.	
Реферат	Реф.	
Рецензия	Рец.	
Санкт-Петербург	СПБ	В выходных данных
Сборник	Сб.	
Свыше	Св.	При цифрах
Сельскохозяйственный	С.-х.	
Серия	Сер.	
Смотри	См.	
Справочник	Спр.	
Статистический	Стат.	
Статья	Ст.	
страница	С.	При цифрах
Таблица	Табл.	
Титульный лист	Тит. л.	
Том	Т.	При цифрах
Указатель	Указ.	
Университет	Ун-т	
Учебник	Учеб.	
Факультет	Фак.	
Филиал	Фил.	
Часть	Ч.	
Энциклопедия	Энцикл.	

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы»
(ФГБОУ ВО «БГПУ им. М. Акмуллы »)

Кафедра математики и статистики

**Методические указания
по выполнению курсовых и выпускных
квалификационных работ студентов**

направление подготовки: ***«Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки: математика +)»***

§ 1. ФОРМУЛИРОВКА ТЕМЫ

Прежде всего, необходимо выбрать направление своего исследования в соответствии со своими индивидуальными склонностями, особенностями, запросами, интересами, сложившимися представлениями в области теории и методики обучения математике.

При этом можно руководствоваться некоторыми рекомендациями, выбрав последовательно:

а) возраст обучаемых (младшие подростки - 5-6 классы; подростки – 7-9 классы; старшеклассники - 10-11 классы);

б) раздел школьной математики, который вам интереснее всего для исследования (арифметика, алгебра, планиметрия, стереометрия, начала математического анализа, тригонометрия, элементы теории вероятностей и статистики, комбинаторика);

в) форму занятий (основные уроки, курсы по выбору, дополнительные занятия, внеурочная работа – кружки, олимпиады, конкурсы, турниры, математические недели и т. п.);

г) уровень усвоения учебного материала (выравнивания, обязательный, продвинутый, творческий);

д) профиль обучения (гуманитарный, социально-экономический, технологический, естественно-математический и др.).

Теперь, исходя из общего направления своей методической работы, нужно сформулировать конкретную тему курсовой работы (КР) и выпускной квалификационной работы (ВКР). Выделим следующие основные требования к её формулировке.

I. Тема должна быть актуальной. Значит, она должна быть посвящена современному, приоритетному направлению образования. К таким направлениям относятся, например, такие:

1) стандартизация образования;

2) требования к результатам освоения образовательных программ (личностные, предметные, метапредметные);

3) педагогические инновационные технологии, в том числе ИКТ;

4) формирование универсальных учебных действий (личностных; регулятивных, включающих действия саморегуляции; познавательных; коммуникативных);

5) системно-деятельностный подход в обучении;

6) компетентностный подход в обучении;

7) метапредметный подход в обучении;

8) организация проектной деятельности обучающихся;

9) организация исследовательской деятельности обучающихся;

10) внедрение новых систем контроля и оценки качества образования;

11) проблемы преемственности, непрерывности образования;

12) предпрофильная подготовка учащихся;

13) профильное обучение;

14) активные методы обучения;

15) методическое обеспечение образовательных программ.

II. Тема должна содержать проблему методического исследования, т. е. отражать решение одного из актуальных, современных вопросов обучения, перспективы его развития, специфику авторского подхода.

В связи с этим рассмотрим следующий пример: «Расширение понятия числа». Из такого названия совсем неясно, какая же методическая проблема рассматривается в данной работе, каковы её цель и назначение. Ещё несколько неудачных, с этой точки зрения, формулировок тем выпускных квалификационных работ. 1) Развитие логического мышления на уроках математики. 2) Формирование познавательного интереса школьников при обучении математике. 3) Обучение элементам наглядной геометрии. 4) Изучение темы «Прогрессии». 5) Курс по выбору «Теорема Эйлера и её приложения».

III. Тема не должна быть "широкой", не должна носить общий характер.

Рассмотрим конкретные примеры. 1. *«Развитие пространственного мышления школьников».* Что здесь имеется в виду? На эту тему написана целая монография И.С. Якиманской «Развитие пространственного мышления школьников» (1-е издание вышло в издательстве «Педагогика» ещё в 1980 году). Это исследование по психологии, в котором обобщен многолетний опыт работы автора. 2. *«Основы личностно-ориентированного образования».* Существуют разные модели формирования личностно-ориентированного обучения, в частности и по математике. Что предлагается исследовать? Возможно, структуру развивающейся личности обучающихся, или организацию индивидуальной траектории развития, или ценности, цели, задачи личностно-ориентированного образования. Имеется замечательная работа И.С. Якиманской, которая так и называется «Основы личностно–ориентированного образования» (М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011). 3. «Тестовый контроль в обучении математике». При такой формулировке, думаю, что автору будет трудно определить предмет своего исследования, сориентироваться на его частных задачах, и в конечном итоге будет невозможно провести на должном уровне положенные этапы методического исследования. Таким образом, возникает ещё одно важное требование к формулировке темы.

IV. Тема должна иметь конкретный характер. В определении «конкретного характера» подразумевается включение в тему трёх следующих важных компонентов. 1. Возрастная группа учащихся, для которой проводится исследование: младшие 5-6 классы, 7-9 классы основной школы, старшие 10-11 классы. 2. Предмет: Математика, Алгебра, Геометрия (Планиметрия, Стереометрия), Алгебра и начала математического анализа и др. 3. Форма занятий: основные уроки, дополнительные занятия, курсы по выбору, внеурочная работа (кружки, олимпиады, турниры, конкурсы и т. п.).

Рассмотрим, например, следующую формулировку: *«Методика решения задач на построение с помощью одного циркуля»*. Из данного названия совершенно неясно, с какими классами предлагает автор решать названные задачи. Кроме этого, данная тема не входит в обязательную школьную программу по математике. Возникает естественный вопрос о том, для каких занятий предназначен рассматриваемый учебный материал: основных уроков, внеурочных занятий или, может быть, автор разрабатывает курс по выбору по предлагаемой проблематике.

Другая тема: *«Особенности обучения математике в старших классах»*. Здесь явно указаны классы, для которых проводится исследование, но о каких особенностях идёт речь в работе: возрастных, педагогических, психологических, методических, может быть, связанных с профильным обучением на старшей ступени общего образования, - остаётся непонятным. Нереально вскрыть и проанализировать всевозможные особенности в рамках выпускной квалификационной работы. Эта тема, как и предыдущая, требует своего уточнения и конкретизации.

Ещё одна тема: *«Образовательные технологии при обучении математике в школе»*. В данном случае остаётся невыясненным вопрос, о каких именно новых современных технологиях обучения идёт речь. В настоящее время, по самым скромным подсчётам, их приблизительно двадцать, причём в каждой имеется ещё по несколько модификаций, и это не считая информационно-коммуникационных технологий.

Приведём примеры тем выпускных квалификационных работ по методике обучения математике, отвечающих выдвинутому требованию.

- Методика преподавания темы "Многоугольники" в условиях уровневой дифференциации обучения.

- Методика преподавания темы "Многогранники" в условиях профильной дифференциации обучения.

- Методика проведения курса по выбору «Кривые и связанные с ними вопросы» в условиях предпрофильной подготовки учащихся.

- Методика проведения курса по выбору «Сферическая геометрия» для учащихся естественно-математического профиля обучения.

- Методика решения уравнений с параметрами на занятиях математического курса по выбору.

Заметим, что в формулировке темы вовсе необязательно присутствие всех трёх выделенных компонентов в явном виде. Они могут быть лишь отражены в названии работы. Другими словами, по формулировке темы исследования чётко и однозначно должны быть определены все выделенные выше компоненты 1 -3 для её конкретизации.

Например:

- *Методика преподавания темы «Окружность и круг» в систематическом курсе геометрии с использованием информационных технологий*. Хотя в этом названии прямо не указаны представленные компоненты, они легко определяются из явного указания темы школьного курса, которая изучается в 7-9 классах на уроках планиметрии. Из понятия «систематический курс» непосредственно следует, что данное исследование относится к основным урокам геометрии.

- *Методика преподавания темы «Показательная и логарифмическая функции», основанная на деятельностном подходе к обучению.* Эта тема изучается, как правило, в старших классах (вне зависимости от профильной ориентации обучения) на уроках по алгебре и началам математического анализа. Поскольку в названии не уточнено, для какой формы занятий проводится данное исследование, в нём должны быть представлены учебные материалы для основных уроков, так как данная тема относится к обязательному школьному курсу математики. Кроме этого, работа с таким названием допускает включение в её содержание главы, посвящённой курсу по выбору или материалам повышенной трудности по данной проблеме. Обратное неверно. Другими словами, работа с таким названием не предполагает методику преподавания данной темы только на курсах по выбору или внеурочных занятиях по математике. Таким образом, в формулировке названия выпускной работы должна быть отражена конкретная область исследования на относительно небольшом по объёму учебном материале, на котором автор сможет глубоко, обстоятельно продемонстрировать умение проводить комплексное методическое исследование, раскрыть и представить своё решение некоторой проблемы. В то же время нельзя впадать и в другую крайность.

Тема не может быть очень «узкой», беспроблемной.

В качестве примера рассмотрим такую тему: *«Методика преподавания темы «Линейная функция» в курсе алгебры 7 класса»*. Если судить по названию, то в чём же проблема данного исследования? Ведь по преподаванию этой темы накоплен значительный опыт, изложенный в соответствующих учебниках по методике обучения математике, методических пособиях по определённым действующим учебникам, в многочисленных статьях журналов "Математика в школе", "Квант", "Математика".

V. Тема должна быть сформулирована на правильном, корректном методическом языке, использовать общепринятые термины.

Примеры неудачных, с этой точки зрения, формулировок:

- *Развитие воображения и представления на уроках математики в 5-6 классах*. Во-первых, не «представления», а «представлений» (во множественном числе). Во-вторых, это название не точно по сути, так как «воображение» и «представления» - два разных понятия психологии, две отдельные нерядоположенные проблемы исследования. Воображение - это один из основных познавательных процессов личности, наряду с ощущениями, восприятием, вниманием, памятью и мышлением. А представления - это форма отражения в виде наглядно-образного знания, одно из проявлений памяти, наглядный образ ранее бывшего ощущения или восприятия.

VI. Тема должна соответствовать основному содержанию работы. Приведѐм несколько примеров из реальной практики:

- *Методика повторения планиметрических задач в старших классах.* По названию можно предположить, что в исследовании рассматривается повторение курса планиметрии при изучении стереометрии в 10-11 классах. В действительности, в работе предлагался курс по выбору о решении планиметрических задач повышенной трудности для старшеклассников.

- *Простые числа и методика их изучения в условиях профильной дифференциации обучения.*

Из такого названия выпускной работы следует, что в ней рассматривается изучение конкретной темы в классах различной профильной ориентации: гуманитарных, экономических, физико-математических и др. Казалось бы, логика исследования этой проблемы предполагает рассмотрение одной из концепций профильной дифференциации (например, одна из первых таких концепций была предложена ещѐ Ю.М. Колягиным и др. (Профильная дифференциация обучения математике //Математика в школе. - 1990. - № 4. - С. 21) и на её основе выявление особенностей методики преподавания указанной темы в классах различной профильной направленности. В действительности, ни о какой профильной дифференциации обучения речь вообще в данной работе не шла. Были предложены учебные материалы для основных уроков алгебры 8 класса и задачи повышенной трудности по данной теме.

Таким образом, подчеркнём ещё раз, что к окончательной формулировке темы следует отнестись весьма серьёзно и ответственно, по-возможности, учитывая предложенные требования. При этом большую помощь может оказать продумывание, так называемых, основных характеристик исследования, о которых пойдёт речь в следующем параграфе. Конечно, полные формулировки тем выпускных квалификационных работ отчасти могут терять свою привлекательность. Они менее лаконичны, но верны по-существу, так как чётко и однозначно определяют основную цель и конкретные задачи для исследователя, что, в свою очередь, позволяет чѐтко спланировать и провести все необходимые этапы методической работы.

Ниже приведены примеры удачных формулировок тем выпускных квалификационных работ.

- *Методические особенности преподавания систематического курса алгебры основной школы с использованием информационно-коммуникационных технологий.*

- *Методика решения планиметрических задач с использованием дополнительных построений. - Методика формирования понятия производной в курсе алгебры и начал математического анализа на основе метапредметного подхода к обучению.*

- *Задачи на построение как средство формирования конструктивных умений и навыков учащихся основной школы.*

- *Методика преподавания темы «Квадратичная функция» в условиях уровневой дифференциации обучения.*

- Методика преподавания темы «Фигуры вращения» в классах различной профильной направленности.

- Реализация принципа гуманизации обучения в предпрофильных математических курсах по выбору.

- Методика проведения курса по выбору «Треугольник и тетраэдр» для учащихся естественно-математического профиля обучения.

- Методика организации проектной деятельности учащихся основной школы при изучении систематического курса алгебры.

- Организация эвристической деятельности старшеклассников при углублённом изучении математики.

- Формирование познавательных универсальных учебных действий в процессе обучения алгебре учащихся основной школы.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Результаты проводимого научного исследования во многом зависят от понимания исполнителем главных основополагающих целей и задач своей работы. Часто неудовлетворительные результаты исследовательской работы заложены уже в первой её фазе - в нечётком определении и формулировке основных характеристик. К ним относятся: ***проблема, объект, предмет, основная цель, гипотеза, частные задачи, методы исследования.***

Остановимся на каждой из них более подробно. Начинается исследование с обоснования его ***актуальности.***

Актуальность исследования определяется необходимостью его проведения в современных условиях. При её обосновании автору нужно показать важность, значимость выбранной темы для школы, например, почему предлагаемый им учебный материал полезен и интересен для школьников. При этом обоснование не должно быть многословным, нет никакой необходимости начинать его описание издалека. Нужно показать главное, в чём суть проблемной ситуации, которая исследуется в работе. Возможно, что в процессе её выполнения будет доказана ненужность изучения той или иной темы, того или иного раздела школьного курса математики. Об этом в своё время очень хорошо сказал А.Д. Александров: «Вопрос о нужности любого школьного предмета, о необходимости того или иного его раздела сводится к вопросу о его практической надобности и значении в развитии личности. И если этот вопрос поставить серьёзно, то выяснится, что кое-что, а то и довольно многое, можно исключить из программ без сожаления, а кое-что следовала бы и добавить. Только всерьёз поставить и решить этот вопрос для каждого предмета не очень просто, потому его решение и заменяют простыми уверениями в надобности "своего" предмета» (О геометрии //Математика в школе. - 1980. - № 3. - С. 56).

Актуальность методического исследования определяется, таким образом, с одной стороны, внешними общественными нуждами, задачами дальнейшего перспективного развития школьной учебной системы, а с другой - внутренними потребностями развития науки - методики обучения, в частности, математике. На основании выявленного противоречия формулируется **проблема исследования.**

Приведём несколько примеров (сначала указана тема работы, набранная курсивом).

1. *Комбинаторные задачи как средство формирования математического мышления учащихся 5-6 классов.*

Проблема - выявление путей реализации развивающей функции обучения математике в процессе формирования комбинаторного стиля мышления.

2. Методические принципы построения системы упражнений по алгебре в основной школе. Проблема заключается в исследовании структуры и содержания системы упражнений по алгебре с позиций системно-деятельностного подхода к обучению.

3. Методика формирования конструктивных умений и навыков учащихся старших классов в процессе решения геометрических задач. Проблема состоит в том, чтобы раскрыть возможные пути формирования конструктивных умений и навыков учащихся в процессе обучения стереометрии на основе совершенствования содержания учебного материала.

4. Методика использования разноуровневого электронного учебника при изучении функций в углублённом курсе математики старших классов. Проблема состоит в том, чтобы выяснить возможности электронных учебников как инструмента проектирования учебного процесса обучения алгебре и началам математического анализа на примере темы «Функции» углублённого курса математики старших классов.

После проблемы исследования определяются **его объект** и **предмет**.

Объект теории познания – это то, что противостоит познающему субъекту (исследователю) в его познавательной деятельности. Другими словами, это часть практики, с которой имеет дело исследователь.

Предмет исследования – это та сторона, тот аспект, та точка зрения, «проекция», с которой исследователь познаёт целостный объект, выделяя при этом наиболее существенные, с его точки зрения, признаки.

Таким образом, видим, что предмет исследования является более «узким» понятием, чем объект, он является лишь составной частью объекта.

Для представленных выше тем выпускных работ их объекты и предметы могут быть соответственно сформулированы следующим образом:

1. ***Объект*** - процесс организации учебной деятельности учащихся при обучении математике в 5-6 классах. ***Предмет*** - методика решения задач комбинаторного характера в 5-6 классах.

2**. *Объект*** - процесс обучения алгебре в 7-9 классах. ***Предмет*** - построение системы упражнений по алгебре для 7-9 классов.

3. ***Объект*** - процесс обучения геометрии в старших классах. ***Предмет*** - методика решения конструктивных задач в курсе геометрии старших классов.

На этом примере можно продемонстрировать, что понятия «объект» и «предмет» носят весьма относительный характер, сформулировав их следующим образом. Объект - методика решения конструктивных задач в курсе геометрии старших классов. Предмет - методические средства формирования конструктивных умений и навыков у старшеклассников в соответствии с требованиями к обучению математике на современном этапе развития школьного образования.

Итак, предмет в первой формулировке полностью совпадает с объектом во второй. В связи с этим исследователю нужно серьёзно продумать, что в его работе следует принять за объект, который не должен быть очень «широким». Например, в третьей теме в качестве объекта исследования возьмём «процесс обучения в школе». Ясно, что конструктивные задачи, относящиеся к обучению геометрии в старшей школе, являются лишь небольшой составной частью системы процесса обучения.

Таким образом, здесь связь с объектом исследования будет не прямой, а опосредствованной через другой объект. Этого не следует делать. Предмет исследования должен быть непосредственным элементом более «широкой» по отношению к себе системы.

4**. *Объект*** – процесс обучения математике на углублённом уровне. ***Предмет*** – использование средств ИКТ в преподавании углублённого курса алгебры и начал математического анализа.

Следующим элементом структуры научного исследования является его основная **цель**, которая состоит в том, чтобы разрешить поставленную проблему. *Цель - это желаемый конечный результат исследования.*

Для приведённых исследований цель может быть сформулирована таким образом.

1. Изучение возможностей формирования у школьников определённого стиля мышления в процессе решения задач комбинаторного характера и разработка соответствующей методики обучения.

2. Построение системы упражнений по алгебре, ориентированной на преимущественное использование продуктивной деятельности школьников.

3. Разработка системы стереометрических задач, направленной на формирование конструктивных умений и навыков обучающихся на старшей ступени общего образования.

При формулировке цели исследования рекомендуем использовать известные стандартизованные термины, а именно: *анализ, внедрение, вскрытие, выявление, выработка, дополнение, знакомство, исследование, изучение, использование, обобщение, обоснование, обсуждение, описание, определение, опровержение, оценка,* *подтверждение, подготовка, показ, проверка, построение, постановка, развитие, разработка, раскрытие, рассмотрение, совершенствование, систематизация, создание, сравнение, уточнение, формулировка, характеристика* и т. п.

Цель определяет и подразделяется на более частные, конкретные задачи исследования. Назовём наиболее типичные из них (безотносительно темы выпускной квалификационной работы).

1) Провести анализ соответствующей литературы (исторической, психолого-педагогической, методологической, методической, математической, учебной и др.).

2) Определить методические (дидактические, психологические, педагогические) особенности исследуемого явления. 3) Изучить состояние и перспективы развития рассматриваемого вопроса по отношению к школе (по-возможности, как прошлых периодов, так и современного этапа).

4) Обосновать и разработать методику обучения (преподавания) конкретного учебного материала.

5) Провести экспериментальную проверку полученных результатов.

После определения цели и задач формулируется ***общая гипотеза*** исследования в первом её приближении, которое будет постепенно совершенствоваться по мере изучения поставленной проблемы.

Гипотеза является важным элементом движения познания к новым открытиям. Она возникает на основе известных знаний, но выходит за их пределы. При этом формулирует новое утверждение, истинность которого до сих пор не была доказана.

"*Гипотеза - это предположение, в котором на основе ряда фактов делается вывод об объекте, о причинах явления, причём предположение это нельзя считать вполне доказанным*".

В специальной литературе выделяются два типа гипотез: описательные и объяснительные. Первые содержат описание причины и возможных следствий из неё.

Вторые, помимо указания возможных следствий, дают гипотетическое объяснение им. Конкретнее говоря, гипотезы в педагогических исследованиях могут предполагать, что одно из средств (или группа их) будет более эффективным, чем другие средства. Здесь гипотетически высказывается предположение о сравнительной эффективности средств, способов, методов, форм обучения, его содержания и т. п. Однако при этом часто не даётся объяснение такого явления, а просто предполагается, что эксперимент докажет большую эффективность. Более обоснованная формулировка гипотезы о сравнительной эффективности предполагает, что исследователь даст объяснение гипотетической закономерности, которая обязательно обеспечит большую эффективность и организует проверку не только результатов, но и самого функционирования этой закономерной связи в процессе обучения.

Приведём примеры формулировок гипотез исследований, темы которых даны соответственно выше в данном параграфе.

1. Систематическое решение задач комбинаторного характера будет способствовать более целенаправленному формированию у школьников основных компонентов теоретического мышления: анализа, рефлексии и внутреннего плана действий.

2. Система упражнений, рассчитанная на организацию преимущественно продуктивной учебной деятельности обучающихся, при соответствующей методике её использования в учебном процессе окажется эффективнее, чем традиционная.

3. Систематическое использование специально подобранных геометрических задач (на развёртки, моделирование, доконструирование, переконструирование и конструирование геометрических фигур) будет способствовать более успешному формированию конструктивных умений и навыков учащихся старших классов.

4. Преподавание темы «Функции» в старшей школе будет более успешным и эффективным, если в учебном процессе будет использоваться электронный учебник с разным уровнем учебных упражнений.

Представленные гипотезы относятся к первому типу, т. е. являются описательными гипотезами.

Теперь представим второй тип.

Для этого рассмотрим следующую тему: *«Методика формирования готовности учащихся старших классов к решению нестандартных математических задач».*

Представим основные характеристики.

*Проблема с*остоит в исследовании психолого-педагогических и методических закономерностей формирования готовности учащихся старших классов к решению нестандартных математических задач.

Объект исследования - процесс обучения учащихся старших классов решению нестандартных математических задач.

Предмет исследования - целенаправленное формирование готовности старшеклассников к решению нестандартных математических задач.

Цель исследования состоит в разработке методики обучения учащихся старших классов решению нестандартных математических задач на основе выявленных психолого-педагогических закономерностей формирования готовности к такой деятельности.

Для осуществления цели сформулируем общую *гипотезу исследования.*

Из-за отсутствия эффективной методики обучения решению нестандартных задач у школьников недостаточно формируются умения решать такие задачи. По-видимому, предполагается, что в процессе решения большого числа стандартных задач и ознакомления учащихся с отдельными нестандартными задачами, у школьников стихийно, самопроизвольно вырабатываются приёмы, навыки, подходы к решению нестандартных задач. Мы исходим из предположения о том, что может быть разработана цельная, достаточно эффективная методика обучения учащихся решению нестандартных математических задач, основанная на теории формирования готовности к деятельности в напряжённых ситуациях, и применение такой методики позволит учащимся успешно решать нестандартные задачи. Сформированность такого умения может служить одновременно показателем формирования умения действовать в нестандартных ситуациях.

Как видим, гипотезы возникают на базе противоречий между старой теорией и новыми фактами, которые уже не могут быть объяснены в рамках этой теории. В результате происходит определённый скачок в познании. Возникает гипотеза, которая носит вероятностный характер. Естественно, в ходе проводимого исследования по выбранной теме гипотеза может уточняться, изменяться, дополняться, может быть подтверждена, а может быть и опровергнута.

Перечисленные основные характеристики исследования должны быть в явном виде отражены ***во введении*** к выпускной квалификационной работе, которое состоит из следующих рубрик:

- Обоснование актуальности исследования и выбор его темы.

- Определения основных характеристик исследования, его методов и практической значимости.

- Представление положений, которые выносятся на защиту.

Приведём теперь пример одного из возможных вариантов введения к выпускной квалификационной работе на тему *«Методика преподавания темы "Объём пространственных фигур" в условиях профильного обучения»*.

В В Е Д Е Н И Е

Актуальность исследования. В последние годы в связи с дифференциацией обучения, появлением классов различной профильной направленности, в том числе гуманитарных, технологических, экономических, естественно-математических и других, по-новому встают вопросы о целях, содержании, методах, формах и средствах обучения математике в школе, о месте и роли каждого школьного предмета.

Точкой отсчёта модернизации школьного образования можно считать Всесоюзный съезд работников народного образования, который проходил в Москве в декабре 1988 года. На нём была принята Концепция общего среднего образования. Основными направлениями развития школы были провозглашены гуманизация и демократизация образования, в связи с чем одной из первоочередных задач была названа необходимость самой широкой дифференциации обучения, направленной на развитие индивидуальных, творческих запросов учащихся, полную реализацию всех природных задатков и склонностей личности.

В 1992 году был принят Закон Российской Федерации «Об образовании», вторая статья которого посвящена принципам государственной политики в области образования. В ней, в частности, говорится о гуманистическом характере образования, приоритете общечеловеческих ценностей жизни и здоровья человека, свободного развития личности, общедоступности образования, адаптивности системы образования к уровням и особенностям развития и подготовки обучающихся, свободе в образовании. Таким образом, Закон открыл широкие перспективы для перестройки среднего образования, возможности для внедрения различных форм дифференцированного обучения в практику работы школы.

Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования была принята в 2002 году (Приказ № 2783 от 18.07.2002 г.). В ней, в частности, говорится о том, что профильное обучение направлено на реализацию личностно-ориентированного учебного процесса и на создание условий для существенной дифференциации содержания обучения старшеклассников с широкими и гибкими возможностями построения для школьников индивидуальных образовательных программ.

Эти важные положении нашли отражение в Законе «Об образовании в РФ», который был принят в 2012 году и вступил в силу с 1 января 2013 года. Вопросам дифференциации обучения математике посвящены работы М.И. Башмакова, В.Г. Болтянского, Г.Д. Глейзера, В.А. Гусева, Г.В. Дорофеева, Ю.М. Колягина, Г.Л. Луканкина, К.А. Рыбникова, И.М. Смирновой, М.В. Ткачѐвой, Н.Е. Фѐдоровой и мн. др. Психологический аспект дифференциации обучения связан с исследованиями в области дифференциальной психологии. Изучению индивидуальных психологических особенностей посвящены работы И.В. Дубровиной, В.А. Крутецкого, В.Д. Небылицына, Б.М. Теплова, И.С. Якиманской и др. Исследованию проблемы индивидуализации и дифференциации обучения с педагогических позиций посвящены работы Ю.К. Бабанского, И.Я. Лернера, И.Э. Унт и др. В них представляются системы обучения, отвечающие склонностям учащихся и направленные на развитие и формирование различных сторон их личности. В перечисленных работах ставились и решались важные общие психолого-педагогические и методические проблемы учёта индивидуальных особенностей учащихся и дифференцированного обучения. В то же время потребности современной школы ставят перед методикой обучения математике новые задачи, связанные с профильным обучением. Необходимы новые учебные пособия, методические разработки, которые учитывали бы специфику такого обучения, но при этом сохраняли достаточно высокий общий уровень математического образования, достигнутого отечественной школой.

Все вышесказанное определило актуальность нашего исследования.

Проблема состоит в обосновании и разработке некоторых методических положений о преподавании геометрии в профильных классах.

Объектом исследования является процесс обучения математике на старшей ступени общего образования.

Предметом исследования является процесс обучения геометрии в старших классах различной профильной направленности.

Целью исследования является разработка методики преподавания темы *«Объём пространственных фигур»* для учащихся старших классов различного профиля обучения. **Гипотеза исследования** заключается в том, что разработанная методика будет способствовать сохранению достаточно высокого общекультурного уровня геометрического образования, раскрытию индивидуальных возможностей учащихся, формированию их личности. Реализация поставленной цели потребовала решения ряда конкретных **задач**, а именно:

1. Определить психолого-педагогические и методические особенности преподавания геометрии в старших классах в условиях профильного обучения.

2. Разработать методику преподавания темы «Объём пространственных фигур» для учащихся гуманитарных и математических классов.

3. Провести педагогический эксперимент (или опытную экспериментальную проверку полученных результатов) с целью проверки эффективности предложенной методики.

Решение поставленных задач потребовало привлечения следующих **методов исследования**: анализ философской, психолого-педагогической, математической и методической литературы, работ по истории математики и истории математического образования, школьных программ, учебников и учебных пособий; изучение опыта работы отечественной и зарубежной школ по исследуемой проблеме; обобщение собственного опыта работы автора в школе; интервьюирование, анкетирование, тестирование учащихся; применение экспертных оценок полученных результатов; проведение педагогического эксперимента по проверке основных положений исследования (опытной проверки полученных результатов).

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нём разработаны и проверены:

1) учебные материалы для преподавания темы «Объём пространственных фигур» в гуманитарных и математических классах;

2) задачи для указанной темы, в том числе: устные; базовые; стандартные; повышенной трудности; нестандартные, исследовательские; занимательные;

3) методические рекомендации для учителей по организации обучения по представленным материалам.

На защиту выносятся: (Замечание. Надо иметь в виду, что для выпускной квалификационной работы достаточно перечисления фактов, выносимых на защиту, в кандидатской и докторской диссертациях нужно подробно представлять положения, выносимые на защиту.)

- Методические положения о преподавании геометрии в старших классах различного профиля обучения.

- Разработка содержания и методов преподавания темы «Объём пространственных фигур» для учащихся гуманитарных и математических классов.

- Методические рекомендации для учителей по преподаванию данной темы.

Структура выпускной квалификационной работы состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во введении обоснованы актуальность исследования, даны его основные характеристики. **Глава I** посвящена историческим и психолого-педагогическим аспектам профильного обучения. Здесь даётся определение понятия дифференциации обучения. Рассматриваются различные виды дифференциации, в том числе уровневая и профильная. Анализируется опыт дифференцированного обучения как у нас в стране, так и за рубежом. Выявляются характерные психолого-педагогические особенности учащихся гуманитарных и математических классов.

В главе II рассматриваются вопросы методики преподавания темы «Объём пространственных фигур» в классах различной профильной направленности. Предлагаются различные способы определения и вычисления объёмов пространственных фигур, в том числе многогранников и тел вращения. Приводятся результаты педагогического эксперимента. В заключении работы приведены основные выводы и результаты проведённого исследования.

Список литературы содержит 50 наименований.

§ 3. СТРУКТУРА ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследование по методике обучения математике является одним из видов общего научного исследования. Поэтому для него характерны все особенности этого явления. Научное исследование рассматривается как субъективный процесс получения новых знаний отдельным человеком или группой лиц, коллективом.

В любой науке исследователь имеет дело с конкретными специфическими объектами. Методика обучения математике, например, изучает процесс обучения математике, поэтому во всех соответствующих методических теориях выделяются характеристики, которые позволяют описывать и объяснять различные его стороны и аспекты, т. е. различные компоненты системы - обучение математике. Таким образом, под научным исследованием по методике обучения математике будем понимать научное исследование, в котором процесс и результат научной деятельности направлены на получение знаний о закономерностях процесса обучения математике.

Из каких же элементов складывается методическое исследование?

Какова зависимость между ними и можно ли её контролировать?

Какое исследование можно считать успешным?

Решение этих вопросов исключительно важно для оценки результатов проведённого исследования. Эта оценка опирается на понимание существенных особенностей методического исследования, в котором выделим следующие *структурные элементы*

1. Исторические аспекты предлагаемой темы.

2. Психолого-педагогические основы рассматриваемой проблемы.

3. Основные достижения методики обучения математике в исследуемой области.

4. Обобщение и систематизация опыта работы отечественной и зарубежной школ по данной проблематике.

5. Использование новых педагогических, в том числе информационных, технологий.

6. Получение и представление собственных результатов (теоретических и практических).

7. Проведение педагогического эксперимента по проверке полученных результатов (или опытной проверки полученных результатов).

8. Выводы, рекомендации.

9. Оформление выпускной квалификационной работы.

10. Защита выпускной квалификационной работы.

Итак, прежде всего, научное исследование по методике обучения математике должно опираться на исторические аспекты предлагаемой темы.

Историзм - важнейший элемент любого научного исследования.

Однажды на одном представительном собрании обсуждался вопрос о преподавании математики в младших классах, в частности курс наглядной геометрии. Велико было моё удивление, когда он стал преподноситься как новое современное достижение методики обучения. В действительности, эта проблема совсем не нова для отечественной школы. Например, она широко дискутировалась в конце XIX - начале XX веков. Ей было уделено большое внимание на знаменитых Всероссийских съездах преподавателей математики (первый съезд проходил на рубеже 1911-1912 гг. в Санкт-Петербурге, а второй - ровно два года спустя в Москве). Давно и хорошо знакомы курсы наглядной геометрии таких известных авторов, как А.М. Астряб, Н.А. Извольский, А.Р. Кулишер, Н.Е. Кутузов и мн. др. Н.М. Бескиным разработана методика преподавания наглядной геометрии (1947).

Пренебрежение или незнание истоков школьного математического образования обедняет исследование любой современной проблемы и в конечном итоге приводит к менее глубоким результатам. Методика, как и любая другая наука, имеет свою историю. Известно, что без истории предмета нет и теории предмета, а без неё нет и самого предмета. Вспомните слова В.Г. Белинского: «Мы вопрошаем и допрашиваем прошедшее, чтобы оно объяснило нам наше настоящее и намекнуло о нашем будущем».

Следующим, не менее важным, компонентом методического исследования является раскрытие психолого-педагогических основ рассматриваемой проблемы. Идея о том, что методика обучения математике невозможна без учёта психолого-педагогических основ обучения имеет давнюю историю. Например, известный российский математикпедагог С.И. Шохор-Троцкий ещё в 1911 году на I-ом Всероссийском съезде преподавателей математики выступил с докладом, который назывался «Требования, предъявляемые психологией к математике как к учебному предмету». Вопросам психологического обоснования методики преподавания математики посвящены многочисленные работы Э.Л. Торндайка, в частности его книга "Психология алгебры" (М.: Учпедгиз, 1934). Этим аспектам посвящены исследования отечественных авторов: В.А. Гусева, Т.В. Габай, Я.И. Груденова, И.А. Зимней, Н.В. Метельского, М.В. Потоцкого, З.И. Слепкань, Н.Ф. Талызиной, Л.М. Фридмана, М.А. Холодной и мн. др.

Анализ содержания выпускных квалификационных работ показывает, что существует некое противоречие. С одной стороны, все авторы убеждены в необходимости психолого-педагогических основ, а с другой, на практике, многие не используют их в должной мере, недооценивают или даже полностью игнорируют. А ведь может так случиться, что предлагаемая автором методика противоречит основным законам психологии и педагогики. Более того, эта новая методика способна нанести вред общему развитию и воспитанию учащихся. При этом автор, по своему незнанию и непониманию сути методического исследования, может и не подозревать о таких печальных последствиях своей работы, внедрённой в учебный процесс.

Одним из важных критериев оценки результата исследования по методике является проверка того, какой психолого-педагогической теорией подтверждаются выводы и рекомендации, предлагаемые в нём.

Назовём в качестве примера лишь несколько наиболее известных теорий:

1) Теория учебной деятельности (В.В. Давыдов, А.Н. Леонтьев, С.Л. Рубинштейн и др.).

2) Теория поэтапного формирования умственных действий (П.Я. Гальперин и его ученики).

3) Теория развивающего обучения (В.В. Давыдов, Д.Б. Эльконин).

4) Теория общего развития в обучении (Л.С. Выготский, Л.В. Занков, М.В. Зверев и др.).

5) Личностно-ориентированное обучение (И.С. Якиманская).

6) Теория индивидуально-психологических особенностей личности (А.Ф. Лазурский, В.А. Крутецкий, В.С. Мерлин, В.Д. Небылицын, Б.М. Теплов и др.).

7) Теория формирования приѐмов усвоения знаний и учебной работы (Д.Н. Богоявленский, Е.Н. Кабанова-Меллер, З.И. Калмыкова, Н.А. Менчинская, Н.Ф. Талызина и др.).

8) Теория проблемного обучения (В.М. Вергасов, И.А. Ильницкая, И.Я. Лернер, А.М. Матюшкин, М.И. Махмутов и др.).

9) Укрупнение дидактических единиц (П.М. Эрдниев).

10) Теории формирования личности на разных возрастных этапах (Л.И. Божович, И.С. Кон, А.В. Мудрик, А.В. Петровский, Д.И. Фельдштейн) и т. д.

В научных исследованиях, в том числе и по методике обучения математике, чрезвычайно важным является преемственность исследования, его место и роль в общей научной системе. В методических исследованиях общие научные методы применяются для решения проблем в области обучения. Значит, содержание методического исследования, например выпускной квалификационной работы, должно опираться на разработанные модели процесса обучения.

Важным этапом любого научного исследования является представление его результатов, т. е. совокупности новых идей, теоретических и практических выводов, полученных в соответствии с поставленными целями и задачами работы.

Теоретическими результатами методических исследований может быть: рассмотрение, выявление, представление некоторых концепций; подходов; направлений; закономерностей; тенденций; классификаций; принципов; критериев и т. п.

Практическими результатами являются, как правило, новые методики; разработки; алгоритмы; предложения; программы; конспекты и т. п. Нужно иметь в виду, что в ряде случаев один и тот же результат, в зависимости от его конкретного содержания, может быть отнесѐн как к теоретическим, так и практическим результатам работы.

Следующей важной проблемой методического исследования является **оценка его результатов,** качества его научной объективности и достоверности. Например, в исследовании по математике верное доказательство новой теоремы или правильное решение новой задачи являются гарантией научной объективности и достоверности полученных результатов исследования.

В исследованиях по методике обучения математике такой гарантией является педагогический эксперимент (экспериментальная проверка полученных результатов). В соответствии с рассмотренными структурными элементами научного исследования по методике обучения математике строится и структура выпускной квалификационной работы, из которой должна быть чётко видна логика раскрытия автором исследуемой проблемы.

Ниже приведены примеры структур выпускных квалификационных работ по конкретным темам.

1. *Методика введения положительных и отрицательных чисел в школьном курсе математики 5-6 классов.*

С О Д Е Р Ж А Н И Е

§ 1. История возникновения и развития понятий положительного и отрицательного чисел . . .

§ 2. Возрастные особенности младших подростков . . .

§ 3. Анализ школьных учебников (прошлых периодов и современных) с точки зрения исследуемой проблемы . . .

§ 4. Развитие способностей и умений обучающихся, связанных с формированием у них количественных представлений . . .

ГЛАВА II. Методика преподавания темы «Положительные и отрицательные числа» . . .

§ 1. Различные трактовки введения отрицательных чисел (алгебраическая, геометрическая и практическая мотивировки) . . .

§ 2. Пропедевтика действий с отрицательными числами . . .

§ 3. Разработка (конспекты) уроков по теме "Положительные и отрицательные числа" . . .

§ 4. Материалы для внеурочной (кружковой) работы по данной теме . . .

§ 5. Результаты опытной проверки (педагогического эксперимента) . . .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . ЛИТЕРАТУРА . . .

ПРИЛОЖЕНИЯ (если они есть) . . .

2. *Нестандартные задачи по алгебре как средство формирования исследовательских способностей учащихся основной школы*.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ . . .

ГЛАВА I. Психолого-педагогические основы теории нестандартных задач в школьном обучении …

§ 1. Различные подходы к определению нестандартной задачи . . .

§ 2. Дидактические функции нестандартных задач . . .

§3.Проблема развития способностей учащихся (математических, исследовательских, творческих, конструктивных и др.) . . .

§ 4. Анализ школьных учебников с точки зрения исследуемой проблемы.

ГЛАВА II. Система нестандартных задач по некоторым темам курса алгебры 7-9 классов . . .

3. *Методика составления блоков взаимосвязанных задач в курсе геометрии 10-11 классов.*

С О Д Е Р Ж А Н И Е

§ 4. ВЫБОР МЕТОДОВ

Методы педагогических исследований можно классифицировать по разным основаниям. Например, по основной цели, источникам накопления информации, способам обработки и анализа полученных данных и др. Особо выделяются теоретические методы и методы анализа реального педагогического процесса. На практике чаще всего исследователю не нужен весь набор известных методов, его задача заключается в том, чтобы определить свой оптимальный набор методов.

Традиционно в педагогических исследованиях исходят из таких требований.

1. Применять такое сочетание методов, которое позволяет получить разносторонние сведения о развитии личности, коллектива или другого объекта воспитания и обучения.

2. Применяемые методы должны обеспечить одновременное изучение деятельности, общения и информированности личности.

3. Методы должны отражать динамику развития определённых качеств как в возрастном плане, так и в течение определённого промежутка времени.

4. Важно применять такие методы, которые позволяют получить сведения об учащемся из возможно большего числа источников, от наиболее компетентных лиц, находящихся с ним в постоянном общении и участвующих в совместной деятельности.

5. Методы должны позволять анализировать не только ход процесса, его результаты, но и условия, в которых он функционирует.

При выборе методов исследования нужно хорошо продумать логику научного поиска решения поставленных задач. На первых этапах своей работы исследователю, как правило, приходится выяснять общую характеристику изучаемого явления. Поэтому здесь преобладают методы теоретического поиска и, прежде всего, изучение и анализ соответствующей литературы.

Всю литературу мы разбиваем на следующие блоки в соответствии с выделенными этапами научного исследования по методике обучения математике.

I. История математики.

II. История математического образования.

III. Психология.

IV. Педагогика.

V. Методика обучения математике.

VI. Математика.

VII. Школьные программы по математике; учебники и учебные пособия по математике для общеобразовательных учреждений.

Чаще всего изучение литературы проводится в историко-хронологической последовательности, но это, конечно, зависит от конкретной темы выпускной квалификационной работы и её частных задач. Иногда целесообразнее познакомиться сначала с новыми публикациями по исследуемой проблематике, понять современные идеи, тенденции её развития, чтобы лучше и объективнее оценить исторические аспекты поставленной проблемы.

Рекомендуем при первичном знакомстве с источником составить для себя специальную карточку, в которой указать следующие сведения.

1. Библиографическая справка (автор или авторы, название, издательство, год издания, страницы и т. п.), заполненную по общепринятым правилам оформления литературы в научных исследованиях (о них подробно будет рассказано в третьей главе настоящей работы). Эта справка нужна для оформления списка литературы.

2. Имеющиеся определения изучаемого явления.

3. Основные идеи, положения, выводы, результаты, рекомендации автора (авторов).

4. Интересные примеры, фактический иллюстративный материал.

5. Удачные цитаты. Способ знакомства с литературой может быть весьма разнообразным. На пути от просматривания к глубокому изучению существует ряд переходных форм, имеющих свои особенности, а именно: - конспектирование - составление сжатого пересказа; - аннотирование - краткое изложение основного содержания; - схематизация - вскрытие внутреннего плана изложения; - анатомирование - более глубокое изучение внутреннего построения изложения и общего содержания; - конденсирование - расширение составленного по одному источнику конспекта добавлением к нему материалов по тому же вопросу, извлечённых из других источников.

Особо обратите внимание на то, что аналитический обзор изученной литературы предполагает: а) изложение основных результатов по исследуемой проблеме; б) определение её места среди системы родственных явлений; в) указание противоречий в её понимании; г) рассмотрение и сравнение различных определений, трактовок, подходов, точек зрения на исследуемые вопросы; д) высказывание и обоснование собственного мнения на рассматриваемую проблему.

Заметим, что, довольно, часто авторы методических исследований пренебрегают последним пунктом или отвечают на него весьма расплывчато и неоднозначно, что недопустимо для работ такого уровня. Одно из требований заключается как раз в том, чтобы, сравнив различные точки зрения, подходы к изучаемому явлению, чётко высказать и обосновать свою собственную позицию и показать её преимущества перед другими. На следующих этапах исследования возникает необходимость проанализировать непосредственное состояние учебной действительности, связанной с решением поставленных в работе вопросов.

Для раскрытия сущности реальных учебно-воспитательных явлений используются практические, эмпирические методы.

1. Наблюдение.

2. Беседа и интервью.

3. «Педагогический консилиум» - экспертные оценки коллектива учителей.

4. Анкетирование.

5. Тестирование.

6. Мониторинг.

7. Диагностирующие контрольные работы.

8. Опытная экспериментальная проверка или педагогический эксперимент.

В методике использования каждого из названных методов можно выделить следующие этапы.

I. Чёткое осознание и продумывание цели применения метода.

II. Составление плана использования.

III. Подбор и формулировка конкретных вопросов, задач, различных упражнений и другой информации.

IV. Форма организации проведения.

V. Обеспечение объективности применения метода.

VI. Обработка полученных данных.

Помимо этих общих этапов, выскажем некоторые частные замечания и рекомендации. Например, при проведении наблюдения, беседы, интервью советуем сразу вести записи, не надеясь на свою память. Для этого заранее нужно продумать и подготовить соответствующий протокол. Причём после окончания его заполнения лучше сразу прочитать сделанные записи, откорректировать и дополнить их, чтобы к отработанному материалу в дальнейшем не пришлось возвращаться ещё раз и переделывать его. При составлении анкет главное - это соответствие вопросника цели исследования. Каждый пункт анкеты должен отвечать исследуемой проблеме, отдельным её аспектам таким образом, чтобы полученная информация могла быть использована для проверки основных характеристик исследования. Сами вопросы должны быть чётко и кратко сформулированы в знакомых для опрашиваемых терминах и подразумевать однозначные конкретные ответы.

Вопросы в анкетах бывают двух типов, в зависимости от характера ответов на них.

1. Закрытый вопрос. Испытуемому предлагается вопрос с готовыми вариантами ответов. При этом может быть только две альтернативы: «да» и «нет», - а могут быть вопросы с большим выбором ответов. Приведём пример. Вопрос: «Что Вам интереснее всего при изучении методики обучения математике?» Возможные ответы. 1. Вопросы общей методики. 2. Теоретические вопросы частной методики. 3. Решение задач школьного курса математики. 4. Вопросы внеурочной работы по математике. 5. Прикладные аспекты математики. 54 6. История методики преподавания математики. 7. Занимательный материал по математике.

2. Открытый вопрос. Отвечающий сам определяет объём ответа, содержание даваемой информации. В качестве примера открытого вопроса можно привести следующий: «Зачем вводятся, с вашей точки зрения, элементы статистики и теории вероятностей в школьный курс математики?» Открытые вопросы, с одной стороны, дают возможность глубже проникать в суть исследуемых явлений, раскрывать позиции отвечающих, но, с другой стороны, уровень ответов зависит от способностей испытуемых к письменному изложению своих мыслей и в очень большой степени от желания сотрудничать с вами.

На практике при составлении анкет используются различные типы вопросов в соответствии с потребностями исследования. Большое значение имеет сам процесс анкетирования. Многое зависит от человека, непосредственно проводящего опрос, его компетентности. Отвечающий должен быть убеждён, что ему задаются вопросы с целью получения такой информации, которую нельзя получить из других источников.

Внимательное, доброжелательное отношение к респондентам и строгое соблюдение всех этических норм являются необходимыми условиями опроса. Их нарушение снижает заинтересованность испытуемых в сотрудничестве. Данные, получаемые в результате закрытого анкетирования, удобно размещать в специальных таблицах. Ниже приведён пример такой таблицы, которая составлена для четырёх закрытых вопросов (они обозначены римскими цифрами), каждый из которых имеет 6 вариантов ответов.

§ 5. ОПЫТНО – ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА

В настоящем параграфе рассмотрим пример возможного представления результатов опытной проверки реального методического исследования на тему «Методика проведения курса по выбору «Многогранники и их приложения» на старшей ступени общего образования». Как правило, педагогическому эксперименту (опытной проверке) посвящается последний параграф (или полностью последняя глава) выпускной квалификационной работы. Он может быть назван, например, следующим образом: *«Результаты педагогического эксперимента»; «Экспериментальная проверка полученных результатов»; «Описание опытной проверки полученных в исследовании результатов»; «Методика экспериментального обучения»* и т. п.

Итак, приведём *конкретный текст*.

Результаты экспериментальной проверки полученных результатов

Экспериментальная проверка полученных результатов, разработанных учебных материалов проводилась в общеобразовательных школах (укажите номера) г. Уфы с 2020 года по 2021 год. Вся экспериментальная проверка была разбита на следующие этапы.

1. Констатирующий.

2. Поисковый.

3. Обучающий и контролирующий.

На первом этапе проводилась экспериментальная проверка, целью которой было изучение:

а) состояния предметных курсов по выбору с учащимися старших классов;

б) воспитательных возможностей таких занятий.

На данном этапе применялись следующие методы исследования: наблюдение за проведением занятий по математике (на уроках и на курсах по выбору) со старшеклассниками и их анализ; беседы с учащимися и учителями; анкетирование учащихся и учителей. Анкетирование ставило своей целью выяснение сформированности интересов учащихся. С помощью опроса представилось возможным более обстоятельно выяснить мнения и пожелания учащихся и учителей по организации занятий на курсах по выбору. Так, для учащихся XI классов была предложена следующая анкета.

Анкета 1 (нужные ответы подчеркните)

I. Ваше отношение к предмету «Математика»?

1) Самый любимый предмет.

2) Занимает равное место среди других предметов естественного цикла.

3) Занимает равное место среди других предметов, изучаемых в школе.

4) Имеется несколько нелюбимых предметов, в том числе математика.

5) Самый нелюбимый предмет (укажите причину).

II. *Что Вам интереснее всего при изучении математики?*

1) Теория.

2) Решение задач всем классом.

3) Самостоятельное решение задач.

4) Практическое применение полученных знаний.

5) Исторические сведения.

III. Ваше участие во внеурочной и внешкольной работе по математике.

1) Посещаю математический кружок в школе.

2) Посещаю математический курс по выбору.

3) Посещаю математический кружок и нематематический курс по выбору (или наоборот). 4) Посещаю подготовительные курсы по подготовке к ЕГЭ.

5) Посещаю нематематический курс по выбору или кружок.

IV. Если посещаете математический курс по выбору, укажите основную причину.

1) Углубление знаний по математике.

2) Расширение знаний по математике, т. е. сверх программы.

3) Подготовка к ЕГЭ.

4) Другие причины (укажите).

V. Сколько в среднем времени Вы тратите на выполнение домашней работы по геометрии?

VI. Какую литературу Вы используете при выполнении домашней работы по геометрии?

1) Учебник, тетрадь с классными записями.

2) Дидактические материалы.

3) Справочная литература.

4) Дополнительная литература (укажите, какая).

Анкетированием было охвачено 70 учащихся. Приведём его результаты (ниже, в таблице, должны указаны проценты всех опрошенных учащихся, давших определённый ответ на поставленный вопрос. Например, на вопрос I, ответ 1 дали 4% всех опрошенных и т. д.).

Анализ результатов проведённого анкетирования показал, что учащиеся XI класса положительно относятся к школьному предмету «математика», активно посещают математический курс по выбору и рассматривают его в основном как форму подготовки к экзаменам по математике. Из форм работ предпочитают в целом решение задач всем классом, т. е. предпочитают несамостоятельные, нетворческие методы работы. Среди учащихся, посещающих математический курс по выбору, была проведена отдельно следующая анкета.

Анкета 2 (нужное подчеркните)

I. Что Вам интереснее всего при изучении математики?

1) Теория.

2) Решение задач всем классом.

3) Самостоятельное решение задач.

4) Применение математики.

5) История математики.

II. Какой раздел школьного курса математики Вы изучаете или изучали с наименьшим интересом? Почему?

1) Планиметрия.

2) Алгебра.

3) Стереометрия.

4) Алгебра и начала математического анализа.

III. Укажите основную причину посещения курса по выбору.

1) Углубление знаний по математике по программе.

2) Расширение знаний по математике сверх школьной программы.

3) Подготовка к экзаменам.

4) Другие причины (назовите, какие именно).

IV. Назовите один из современных разделов математики.

V. Назовите имена нескольких известных отечественных современных учёных-математиков.

VI. Пользуетесь ли Вы дополнительной литературой по математике?

1) Да (укажите, какой).

2) Нет.

VII. Выписываете ли Вы журнал "Квант"?

1) Да.

2) Нет.

VIII. Какими электронными пособиями по математике Вы пользуетесь?

Далее следуют результаты анкетирования.

Результаты анкетирования позволили сделать следующие выводы.

1. Почти все учащиеся, которые посещают математический курс по выбору и называют математику одним из самых своих любимых предметов или самым любимым предметом, называют стереометрию самым нелюбимым её разделом. В числе причин своего негативного отношения называют такие: неинтересно, ненужно, устарела. Такое положение не может не настораживать, так, как хорошо известно, какими богатыми возможностями обладает геометрия, в частности стереометрия, для решения не только образовательных, но и воспитательных, и развивающих задач обучения.

2. Учащиеся старших классов живо интересуются тем, что происходит в стране, современными событиями, достижениями современной науки. При этом, как показали результаты опроса, старшеклассники не знают современных разделов математики, не знают известных российских учёных-математиков - своих современников. (То, что назвали имя А.Н. Колмогорова, объясняется отчасти тем, что он является автором учебника по алгебре и началам математического анализа для 10-11 классов.) Учащиеся, интересующиеся математикой, почти не читают и не выписывают журнал «Квант», не читают и никакой другой научно-популярной литературы.

3. На занятиях курсов по выбору со старшеклассниками не уделяется должного внимания такому важному разделу школьного курса математики, как стереометрия, не раскрываются широкие возможности стереометрии для воспитания и развития учащихся: в содержание курсов по выбору мало включается вопросов истории математики, еѐ приложений, связи с современностью, занимательного материала; не уделяется достаточного внимания творческим методам работы. Учителя, ведущие курсы по выбору, одной из главных причин этого называют отсутствие соответствующей литературы с разработкой конкретных курсов, в которых были бы освещены основные вопросы истории, приложений, связи с современностью, занимательности изучаемых тем.

На основании анализа результатов первого этапа экспериментальной проверки была выдвинута гипотеза исследования, а именно: курс по выбору «Многогранники», направленный на комплексное решение задач обучения, будет способствовать повышению уровня воспитания и развития учащихся, оказывать существенное воздействие на повышение качества их знаний по предмету.

На втором, поисковом, этапе эксперимента решались следующие задачи.

1) Уточнение программы курса по выбору «Многогранники и их приложения», отвечающего комплексному решению образовательных, воспитательных и развивающих задач обучения.

2) Проверка доступности отобранного материала и качества его усвоения.

3) Проверка эффективности методики проведения занятий названного курса по выбору.

4) Установление влияния отобранного материала и методов проведения занятий на уровень воспитания и развития учащихся.

Экспериментальная проверка проводилась в гимназии №93 г. Уфы. В ней принимали участие 28 учеников XI класса.

В ходе экспериментальной проверки особое внимание обращалось на:

а) поддержание постоянного интереса учащихся к занятиям, к конкретному содержанию текущего материала;

б) создание творческой обстановки на занятиях;

в) проявление учащимися максимума активности и самостоятельности;

г) обращение учащихся к дополнительной научно-популярной литературе и электронным ресурсам по теме занятий.

Перед началом проведения курса по выбору *«Многогранники и их приложения»* учащимся была предложена следующая анкета.

Анкета № 3

1. Когда и для чего возникла геометрия?

2. Какие учёные древности занимались геометрией?

3. Какие разделы науки используют геометрию?

4. Каких Вы знаете современных учёных-геометров?

5. В каких профессиях используется геометрия?

6. Развитию каких способностей помогает геометрия?

7. Формированию каких нравственных качеств и черт личности способствует изучение геометрии?

8. Кем собираетесь стать после окончания школы?

Ответы. На 1-й и 2-й вопросы учащиеся ответили довольно бойко и дали обстоятельные ответы, объяснения того, как возникла геометрия из потребностей практики (в основном, указав измерение земли); назвали имена известных древнегреческих математиков - Пифагора, Фалеса, Герона (как видим, по названиям теорем школьного курса планиметрии). Однако на последующие вопросы (3-7) ответов практически вообще не последовало. Поэтому перед нами возникла непростая задача – преодолеть прежде всего негативное отношение к предмету, показать и доказать учащимся, что геометрия - это живая, интересная, нужная современному человеку наука. Здесь, конечно, сыграло большую роль первое занятие курса по выбору, на котором учащимся были представлены основные вопросы темы, перспективы их развития, сказано о наиболее ярких моментах темы - истории, приложениях, красоте теории многогранников.

Как уже отмечалось ранее, на втором этапе эксперимента уточнялась программа курса по выбору, окончательный вариант которой включил в себя следующие занятия.

1. Многогранники. Основные определения.

2. Выпуклые многогранники и их свойства.

3. Выпуклые многогранники в линейном программировании.

4. Теорема Эйлера.

5. Применение теоремы Эйлера к решению некоторых задач.

6. Правильные многогранники.

7. Полуправильные и звёздчатые многогранники.

8. Моделирование многогранников.

9. Сечения многогранников.

10. Равновеликость и равносоставленность многогранников.

11. Симметрия многогранников.

12. Кристаллы - природные многогранники. На занятиях отрабатывалась система задач, предназначенных как для решения в классе, так и для домашней работы, отбирались дополнительные задачи для самостоятельной работы учащихся.

В ходе данного этапа с целью проверки доступности и усвоения предложенного материала были проведены три диагностирующие контрольные работы.

Приведём их содержание.

Контрольная работа № 1 (Предлагалась учащимся на занятии «Полуправильные и звёздчатые многогранники».)

1. Разделите куб на шесть четырёхугольных пирамид.

2. Существует ли призма, имеющая 74 ребра? Почему?

3. Призма имеет k граней. Какой многоугольник лежит в её основании?

4. Два правильных тетраэдра имеют общую грань и расположены по разные стороны от неё. Является ли образовавшийся многогранник правильным? Почему?

5. Какой полуправильный многогранник напоминает изображение футбольного мяча?

6. Имеет ли куб звёздчатую форму? Почему?

Контрольная работа № 2 (Предлагалась учащимся на занятии «Симметрия многогранников».)

1. Можно ли в сечении правильной четырёхугольной призмы плоскостью получить восьмиугольник? Почему?

2. Постройте сечение куба ABCDA1B1C1D1 плоскостью, проходящей через вершину A и точки M, N, принадлежащие соответственно рёбрам куба A1B1 и B1C1.

3. Нарисуйте три различные развёртки куба.

4. Какое минимальное число красок нужно взять, чтобы окрасить все грани правильного октаэдра таким образом, чтобы соседние грани имели разный цвет?

5. Может ли выпуклый многогранник иметь два центра симметрии? Ответ обоснуйте.

6. Изобразите многогранник, имеющий ось симметрии 5-го порядка (укажите эту ось).

Контрольные работы № 1 и № 2 имели один вариант, т. е. всем учащимся предлагалось одинаковое содержание работы.

Контрольная работа № 3 - домашняя проверочная работа. Она состояла всего из одной, но комплексной задачи, решение которой охватило основные понятия и идеи темы. Работа носила характер обобщающего повторения и имела ряд преимуществ по сравнению с обычной работой, в которую входит набор различных задач.

Во-первых, одна задача - одно условие, ученик получает меньше информации для начала работы, увеличивается отрезок времени для её выполнения и тем самым повышается её эффективность.

Во-вторых, что более существенно, одна задача является самостоятельным исследованием, что способствует сознательному и прочному усвоению материала, развитию творческой активности учащихся, формирует навыки исследовательской работы (Смирнова И.М. Задачи к повторению темы «Многогранники» //Математика в школе. - 1985. - № 1. - С. 47).

В работе было предусмотрено восемь вариантов. Исходные многогранники во всех заданиях самые простые: куб, правильная призма, правильная пирамида. Это объясняется желанием упростить вычислительную часть задачи. В первых четырёх задачах сечение задаётся тремя точками или прямой и не принадлежащей ей точкой, в 5-й и 6-й - для построения сечения необходимо применить признаки параллельности прямой и плоскости или параллельности двух плоскостей, а в задачах 7-й и 8-й - признаки перпендикулярности прямой и плоскости или перпендикулярности двух плоскостей.

Приведём в качестве примера задачу первого варианта.

Задача. В кубе ABCDA1B1C1D1 с ребром a проведите сечение через вершину A и точки E и F - середины рёбер соответственно A1D1 и D1C1. Определите: 1) вид сечения; 2) площадь сечения; 3) угол α между плоскостью сечения и плоскостью грани ABCD данного куба; 4) объём многогранников, на которые разбивается данный куб плоскостью сечения. Такая проверочная работа может быть рекомендована для проведения обобщающего повторения по теме «Многогранники» в основном курсе стереометрии.

Приведём теперь результаты первой, второй и третьей контрольных работ.

Анализ приведённых результатов показал, что вопросы, непосредственно разобранные на занятиях курса по выбору, хорошо усвоены учащимися. Там же, где задание немного отличается от того, что предлагалось на занятиях, где необходимо проявить творческие способности, результаты хуже. Самым сложным из всех оказался вопрос о том, какой многогранник напоминает изображение футбольного мяча. Домашняя контрольная работа показала, что учащиеся затрудняются в нахождении угла между плоскостями (на что следует обратить особое внимание на основных уроках).

Результаты второго этапа экспериментальной проверки позволили перейти к её третьему этапу - обучающему и контролирующему, который проводился в течение 2020/2021 уч.г., в гимназиях №3 , № 39 и № 91 г.Уфы. Всего экспериментальной проверкой было охвачено 43 ученика.

Преподавание тема «Многогранники» осуществлялось по программе, представленной выше. В ходе её изучения учащимся предлагались контрольные работы № 1, № 2 и № 3. Для более глубокой оценки знаний и умений учащихся при использовании всех видов контрольных работ на данном этапе экспериментальной проверки был применён расчёт коэффициента усвоения учебного материала.

§ 9. ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Завершает основную часть выпускной квалификационной работы рубрика **«Заключение».** В нём должны быть охарактеризованы степень решения поставленных в начале работы конкретных частных задач и достижения главной цели исследоваввния. Помимо этого, должно быть сказано об основных выводах и результатах проведенного исследования. Таким образом, в заключении работы в краткой форме подводятся итоги теоретического и экспериментального исследования.

Его результаты могут быть отражены в следующих стандартизованных терминах: алгоритм, анализ, закон, закономерность, гипотеза, идея, классификация, концепция, критерий, метод, модель, подход, понятие, правило, предложение, приём, принцип, проблема, описание, рекомендация, система, средство, тенденция, теория, терминология, типология, требование, стандарт, условие, факт.

Теперь приведём примеры заключений.

I. *Внеурочная работа по математике в V-VI классах как важная форма воспитания интереса учащихся к предмету.*

З а к л ю ч е н и е

В ходе теоретического и экспериментального исследования получены следующие основные результаты.

1. Исследовано современное состояние внеурочной работы по математике в V-VI классах. Определено, что основной задачей внеурочной работы в этих классах является воспитание интереса учащихся к предмету и основной её формой является математический кружок.

2. Исходя из психолого-педагогических особенностей учеников V-VI классов, обоснована целесообразность выбора в качестве основного содержания внеурочной работы системы нестандартных задач.

3. Построена система нестандартных задач, способствующая формированию интереса к математике у школьников V-VI классов.

4. Разработана и практически реализована методика внеурочной работы в V-VI классах, включающая в себя описание конкретных форм работы и примеры их реализации, а также соответствующую систему упражнений. Практическая реализация разработанной методики способствует развитию интереса к математике у школьников V-VI классов. Перспектива дальнейшего исследования этой проблемы наиболее естественно связывается с исследованием проблемы формирования и закрепления интереса к математике в последующих классах посредством нестандартных задач.

II. *Теория и методика обучения доказательству в курсе планиметрии основной школы.*

З а к л ю ч е н и е

В процессе теоретического и экспериментального исследования в соответствии с его целью и задачами получены следующие основные выводы и результаты.

1. Для овладения доказательством методически оправданным считается подход, в котором органически сочетаются логические и эвристические аспекты обучения.

2. На основе сложившейся теории и методики обучения доказательству, новых образовательных идей уточнено понятие «обучение доказательству». Это позволило выделить новое содержание обучения доказательству.

3. Для обучения учащихся доказательству необходимо сформировать у них определенную иерархию умений, которая реализуется по следующим этапам: обучение на готовых доказательствах, формирование знаний и умений для самостоятельного поиска и осуществления математических рассуждений, овладение умением опровергать готовые доказательства.

4. В соответствии с представленной теорией обучения доказательству рассмотрена методика формирования умения доказывать на первых уроках геометрии, умения применять эвристические приёмы. Детально разработана методика формирования умения опровергать предложенные доказательства. Её экспериментальная проверка подтвердила справедливость гипотезы исследования и доказала, что целенаправленное формирование действий, адекватных доказательству, ведёт к улучшению результатов обучения, к усилению математической подготовки учащихся, к вооружению их необходимыми умениями и навыками рассуждений. Всё это даёт основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

III. *Методические принципы построения системы упражнений по алгебре в основной школе.*

З а к л ю ч е н и е

Проведённое по теме выпускной квалификационной работы исследование, итоги экспериментальной работы и результативность массового использования разработанных на основании исследования методических рекомендаций привели к следующим выводам.

1. Построение системы упражнений по алгебре, ориентированной на преимущественное использование продуктивной деятельности школьников, позволяет добиться от большинства учащихся хорошего понимания идей и 125 методов алгебры, обеспечивать сознательность усвоения теоретического материала и применения его при решении задач.

2. Широкое использование в системе упражнений по алгебре нестандартных учебных задач создаёт условия для активизации познавательной деятельности учащихся, для развития их творческих способностей и интереса к предмету.

3. Разработанная в данном исследовании структура и содержание системы упражнений позволяют добиться преодоления догматизма и формализма в знаниях учащихся, развить самостоятельность мышления, необходимую человеку для активной и творческой жизни.

4. Широкое использование в системе упражнений внутрипредметных связей позволяет сформировать у школьников единую интегрированную ориентировочную основу деятельности, а также сформировать у них представления о единстве идей и методов курса алгебры.

5. Практическая направленность многих нестандартных упражнений создаёт благоприятные условия для формирования межпредметных связей и, в первую очередь, для активного овладения курсами геометрии и физики.

6. Разработанная система упражнений по алгебре, её содержание и методика использования этой системы в учебном процессе приобретают особую актуальность в связи с введением ФГОС основного общего образования

(2010), созданием новых программ и учебников по математике, основанных на новых методических подходах.

IV. Методические вопросы изучения геометрических преобразований пространства на старшей ступени общего образования.

З а к л ю ч е н и е Результаты, полученные в выпускной квалификационной работе, позволяют сделать следующие выводы.

1. Разработанная система пропедевтической работы с учащимися 10-11 классов по изучению преобразований пространства в курсе геометрии обеспечивает достаточную глубину усвоения основных понятий темы, учит видеть возможные использования преобразований пространства в решении задач. Выявленная система ориентиров в изучаемом материале позволяет организовать работу учащихся так, что знания приобретаются ими в значительной мере путём самостоятельных действий по исследованию изучаемого преобразования.

2. Предложенная система задач содействует более полному раскрытию связей между различными темами школьного курса геометрии, подводит учащихся к осознанию факта возможного существования тех видов преобразований пространства, которые ранее в курсе геометрии не рассматривались.

3. Разработанный предметный курс по выбору «Преобразования пространства с применением прямоугольных координат» доступен учащимся 11 классов, позволяет повторить, систематизировать и углубить их знания по преобразованиям плоскости, преобразованиям пространства, координатному методу; способствует установлению взаимосвязи между отдельными темами курса геометрии; раскрывает некоторые аспекты использования геометрических преобразований пространства, в частности, в выделении симметрий правильных многогранников.

4. Рекомендуемая методика изучения материалов курса по выбору ориентирует учащихся на самостоятельное углубление и расширение знаний, приобретаемых в обязательном (базовом) курсе геометрии, учит сопоставлять новые факты с ранее изученным материалом и искать возможные применения новых знаний.

5. Сочетание геометрической наглядности с координатным методом в рассмотрении преобразований пространства способствует развитию пространственных представлений учащихся.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.АКМУЛЛЫ

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Уфа 2018

Рекомендации составлены на основе государственных и отраслевых стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу, а также на основе документов, регламентирующих издательскую деятельность в вузе, на основе нормативных требований к итоговой государственной аттестации выпускников. Излагаются требования к компьютерному набору, правила оформления рукописи и ее документального сопровождения. Приводятся образцы оформления титульного листа ВКР, бланков сопроводительной документации, примеры библиографических записей и общепринятых сокращений слов и словосочетаний.

Унификация требований к оформлению ВКР отвечает требования системы менеджмента качества образовательного процесса, реализуемой БГПУ им.М.Акмуллы.

Предназначены для студентов, преподавателей, деканов и директоров институтов. Могут быть полезны также при написании рефератов, курсовых работ и различной документации.

Содержание

1. ОФОРМЛЕНИЕ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1.1. Общие требования

Выпускная квалификационная работа представляется в твердом переплете. Текст должен быть набран на компьютере и отпечатан на стандартных листах белой бумаги формата А4 (210x297 мм).

Текст набирается в редакторе MS Word. При наборе рекомендуется использовать гарнитуру шрифта Times New Roman. Размер основного шрифта – 14 пт, вспомогательного (для сносок, таблиц) – 12 пт, межстрочный интервал – 1,5. Поля: левое – 30 мм, правое – 15 мм, верхнее – 20 мм, нижнее – 20 мм. Наименование разделов, глав, параграфов должны быть краткими.

Все страницы ВКР нумеруются по порядку от титульного листа до последней страницы. Первой страницей считается титульный лист, но на нем цифра 1 не ставится, на следующей странице (вслед за титульным листом обычно располагается содержание) проставляется цифра 2 и т.д., т.е. страницы выпускной квалификационной работы нумеруются арабскими цифрами нормальным шрифтом № 14 с соблюдением сквозной нумерации по всему тексту. Номера страниц проставляются внизу в центре страницы без точки в конце (меню – вставка – номер страницы). Иллюстрации, таблицы и схемы, расположенные на отдельных листах внутри текста, входят в общую нумерацию.

1.2. Правила компьютерного оформления текста

Материал работы формируется в одном файле MS Word.

Перенос слов в заголовках не допускается. Наименование разделов (введение, содержание, заключение, список литературы, приложения) печатаются в виде заголовков первого порядка, без точки в конце и с новой страницы. Во избежание смещения начала главы рекомендуется перед заголовком ставить разрыв страницы (в меню Вставка – разрыв – новую страницу).

Текст набирается с соблюдением следующих правил:

1) формирование абзацев выполняется через команду Формат - Абзац;

2) слова разделяются только одним пробелом;

3) перед знаком препинания пробелы не ставятся, после знака препинания – один пробел;

4) при наборе должны различаться тире (длинная черточка) и дефисы (короткая черточка). Тире отделяется пробелами, а дефис нет.

5) после инициалов перед фамилией, внутри сокращений, перед сокращением г.– указанием года и т.п. ставится неразрывный пробел (Shift-Ctrl-пробел), для того чтобы не разрывать цельность написания, например: А.С. Пушкин, 1998 г., т. д., т. е.;

6) основной текст выравнивается по ширине, с отступом первой строки 1,25 см;

7) точка в конце заголовка не ставится; рекомендуется смысловое деление заголовка по строкам;

8) шрифтовые выделения внутри текста должны соответствовать следующей иерархии: строчной полужирный прямой – строчной полужирный курсив – строчной светлый курсив;

9) таблицы набираются кеглем 12 и помещаются в основной текст;

10) цитаты, прямую речь, иносказательные выражения лучше помещать в двойные кавычки;

11) при трехуровневой рубрикации (главы – параграфы – пункты) заголовки первого уровня (введение, содержание, названия глав, заключение, список литературы, приложения) набираются прописными полужирными буквами (шрифт 14), второго (названия параграфов) – строчными полужирными (шрифт 14), третьего (названия в пунктах параграфа) – строчным полужирным курсивом (шрифт 14). При двухуровневой рубрикации заголовки первого уровня (названия глав и пр.) – строчными полужирными (шрифт 14), второго (названия параграфов) – полужирным курсивом (шрифт 14). Выравнивание заголовков – по центру. Нумеровать главы, параграфы, пункты в тексте работы следует арабскими цифрами.

Пример:

Глава 2. СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕРРИТОРИИ **2.1. Население** *2.1.1. Возрастной состав*

При сочетании полужирных и светлых шрифтовых выделений следует иметь в виду, что полужирный строчной прямой «старше», «главнее» полужирного строчного курсива, который, в свою очередь, «главнее» светлого строчного курсива. Эту иерархию особенно следует учитывать при внутритекстовой рубрикации, по-разному выделяя понятия, определения, термины, примеры, логические усиления и т.п.

Не допускаются:

- интервалы между абзацами в основном тексте;
- перенос слов в заголовках, а также отрыв предлога или союза от относящегося к нему слова.
- формирование отступов с помощью пробелов;
- «ручной» перенос слов с помощью дефиса;
- внутритекстовые выделения подчеркиванием и прописными буквами;
- использование разрывов разделов (глав), кроме случаев смешанных (книжных и альбомных) ориентаций листов;
- выделение текста подчеркиванием.

1.3. Числа и знаки в тексте

Однозначные числа не при единицах физических величин, если они встречаются в тексте в косвенных падежах, рекомендуется писать в буквенной, а не в цифровой форме (например, «одного», «двух» и т.д.).

Крупные круглые числа (тысячи, миллионы, миллиарды) рекомендуется писать в буквенно-цифровой форме – в виде сочетания цифр с сокращенными обозначениями: 20 тыс., 20 млн., 20 млрд.

В числах с десятичными дробями целое число отделяют от дроби запятой, а не точкой. Например: 6,5 или 8,12.

Простые дроби в тексте рекомендуется писать через косую линейку: 1/5, 2/3 и т.д.

Для обозначения интервала значений в технических и естественнонаучных изданиях предпочтительным является стандартный знак многоточие (...) между числами в цифровой форме, в гуманитарных и экономических – тире или предлоги: от (перед первым числом) и до (перед вторым).

При указании пределов значений единицу измерения приводят один раз. Например: 35–40 мм, от 5 до 6 мм.

Если однозначные порядковые числительные следуют одно за другим, то они могут быть даны цифрами, причем падежное окончание (наращение) ставят только при последней цифре. Например: 3, 5, 7 и 8-я позиции, но 4-я и 10-я.

Сложные прилагательные, первой частью которых является числительное, а второй – метрическая мера, процент или другая единица величины, следует писать так: 5-литровый, 20%-ный, 10-тонный.

Падежное окончание в порядковых числительных, обозначенных арабскими цифрами, должно быть однобуквенным, если последней букве числительного предшествует гласная (5-й, 7-е, 10-м), и двухбуквенным, если последней букве числительного предшествует согласная (5-го, 50-му).

Математические обозначения =, ~, <, > и др. допускается применять только в формулах. В тексте их следует передавать словами равно, приблизительно, меньше, больше. Например, нельзя писать ... > 5 м, нужно: больше 5 м.

1.4. Сокращения в тексте

Вольные сокращения слов не допускаются, примеры принятых сокращений слов приводятся в справочной литературе.

Обязательно сокращают стоящие перед цифрой слова, обозначающие ссылку в тексте на тот или иной его элемент: том – т., часть – ч., выпуск – вып., рисунок – рис., издание – изд., таблица – табл., глава – глав., раздел – разд., параграф – §, пункт – п.

Указанные ниже ученые степени, должности или профессии приводят в сокращенном виде: академик – акад., технических наук – техн. н., член-корреспондент – чл.-корр., экономических – экон., профессор – проф., философских – филос., филологических – филол., доцент – доц., исторических – ист., доктор – д-р, физико-математических – физ.-мат., кандидат – канд.

Сокращают названия организаций, учреждений, а также термины, принятые в научной и технической литературе (сокращения не делают в начале фразы): БГПУ, ВИНИТИ, СВЧ, КПД, ЭДС, термо-ЭДС, ИК-диапазон, МОП-структура и т.п.

Сокращают поясняющие слова: то есть – т.е., и прочие – и пр., и тому подобное – и т.п., смотри – см., и другие – и др., сравни – ср.

Только в словарях и в справочниках допускаются следующие сокращения: так называемый – т.н., около – ок., так как – т.к., уравнение – ур-ние, например – напр., формула – ф-ла.

1.5. Рисунки

Рисунки в ВКР могут быть двух видов: отсканированные и построенные с использованием графического редактора.

Общими для тех и других являются следующие требования:

1. Площадь изображения вместе с подрисуночной подписью не должна выходить за поля основного текста.
2. Все рисунки должны быть выполнены в едином масштабе или допускать приведение к нему, быть соизмеримы друг с другом.
3. Шрифт, которым выполняются надписи на рисунках, не должен быть крупнее 11-го и мельче 7-го.

Для сканирования следует использовать только оригиналы (первоисточники) рисунков: фотографий, сложных чертежей, диаграмм и т.п. Сканирование с ксерокопий и других вторичных документов не допускается.

Штриховые рисунки – графики, структурные и функциональные схемы – должны строиться только в графическом редакторе в формате JPEG с разрешением 300 dpi. Допустимы форматы TIF (TIFF), WMF, BMP. Другие форматы не используются.

Для того чтобы рисунки, выполненные средствами Word, при попытке открыть их не «разваливались» на составляющие, они должны быть сгруппированы.

Количество рисунков в работе диктуется целесообразностью. Их следует располагать непосредственно после текста, в котором они упоминаются впервые, а при невозможности размещения на данной странице переносятся на следующую.

Обозначения, термины и другие надписи на рисунках должны соответствовать тексту и подрисуночным подписям. Текст, связанный с рисунком (надписи и подписи), набирается 12-м шрифтом. Текстовые надписи на рисунках следует заменить цифровыми обозначениями, кроме надписей, обозначающих среды и направления (Вода, Газ, К выходу и т.п.). Текстовые надписи начинают с прописной буквы, сокращения в них не допускаются. Цифровые обозначения раскрываются в подрисуночных подписях.

На рисунках используют следующие виды условных обозначений:

1. *Арабские цифры*. Ими обозначают детали изображения, значения (названия) которых расшифровывают в экспликации подписи или в тексте, проставляя после соответствующих слов.
2. *Римские цифры*. Ими обозначают части изделий, зоны действия, распространения.

3. *Прописные буквы латинского алфавита*. Ими обозначают точки геометрических фигур, узлы изделий, вершины углов, электроизмерительные приборы и т.п.

4. *Прописные буквы русского или латинского алфавита с арабскими цифрами*. Ими обозначают элементы электрических схем.

5. *Строчные буквы латинского и греческого алфавитов*. Первыми обозначают отрезки геометрических фигур, вторыми – углы на этих фигурах.

Если все позиции рисунка раскрываются в тексте, а развернутые подписи отсутствуют, то цифры на рисунке ставят в порядке упоминания их в тексте. Если же позиции раскрываются лишь в подрисуночной подписи, то на рисунке их нумеруют по часовой стрелке. При этом по всей рукописи должно быть выдержано единообразие.

Нумерация рисунков сквозная.

Полную подрисуночную подпись составляют следующие элементы:

1) сокращение «Рис.» и его порядковый номер, на который обязательно должна быть ссылка в тексте;

2) собственно подпись;

3) экспликация (если нужно), т.е. пояснение деталей (частей) рисунка.

Сокращение с порядковым номером без подписи нельзя дополнять экспликацией.

Правильно:

Рис. 2: Строение излома: ***1*** **– поверхность усталостного разрушения с бороздками;** ***2*** **– зона долома.**

Если работа содержит всего один рисунок, то номер ему не присваивается, сокращение «рис.» под ним не пишется, а упоминание его в тексте формулируется так: «На рисунке приведена зависимость...» или «см. рисунок».

Между номером рисунка и тематической частью подписи ставится точка, после тематической части перед экспликацией (если она есть) – двоеточие, между элементами экспликации – точка с запятой. В конце подрисуночной подписи точка не ставится.

1.6.Таблицы

Таблицей называют цифровой и текстовой материал, сгруппированный в определенном порядке в горизонтальные строки и вертикальные графы (столбцы), разделенные линейками. Верхнюю часть таблицы называют головкой (чаще употребляют слово «шапка»), левую графу — боковиком.

Таблицы печатают при их первом упоминании. Небольшие таблицы следуют за абзацем, в котором была ссылка на них. Таблицы, занимающие больше половины страницы, – на следующей отдельной странице (страницах). Все таблицы в рукописи должны быть пронумерованы. Порядковая нумерация таблиц должна быть сквозной. Ссылки в тексте на таблицы дают в сокращенном виде, например: **табл. 1**, **табл. 5**. Над таблицей в правом верхнем углу обычным шрифтом пишут полностью: **Таблица 3**, а по центру – ее название (строчном полужирным), на последующих страницах – **Продолжение табл. 3**, на последней – **Окончание табл. 3**.

Пример:

Таблица 3

Предельно допустимые концентрации или уровни некоторых суперэкотоксикантов в природных средах

Вещество	Вода, мг/л	Воздух, мг/м^3	Почва, мг/кг
Бенз(а)пирен	$5*10^{-6}$	$1*10^{-6}$	0,02
ДДТ	0,1	$5*10^{-4}$	0,1
ГХЦГ	0,02	0,03	0,1
Ртуть	$5*10^{-4}$	$3*10^{-4}$	2,1
Кадмий	0,001	$3*10^{-4}$	-
Свинец	0,03	$3*10^{-4}$	32

Если таблица в работе всего одна, ее не нумеруют и слово **Таблица** над ней не пишут: читатель и так видит, что перед ним таблица.

Сокращения слов в таблицах, кроме общепринятых, не допускаются. В головках таблиц и в боковике текст печатают горизонтально. Таблицы должны быть обязательно разлинованы по вертикали.

На каждую таблицу в тексте обязательно делается ссылка. Она должна органически входить в текст, а не выделяться в самостоятельную фразу, повторяющую тематический заголовок таблицы. Поэтому, например, вариант «Емкость варикапа зависит от напряжения (табл. 8)» предпочтительнее варианта «Зависимость емкости варикапа от напряжения показана в табл. 8».

Таблицы можно давать с заголовками и без заголовков. Заголовок необходим во всех случаях, когда таблица имеет самостоятельное значение и читатель может обратиться к ней помимо текста. Без заголовков дают таблицы вспомогательного значения.

Головки таблиц должны состоять из заголовков к каждому столбцу, не исключая боковика, т.е. в верхнем левом углу таблицы обязательно помещается заголовок к боковику. Ячейка головки над боковиком не должна оставаться пустой. Заголовок следует формулировать кратко и в единственном числе. Вместо слов можно давать буквенные обозначения (например, d, мм; V, В; P, Вт).

Диагональные линейки в таблицах не допускаются.

Столбцы (графы) и строки в таблицах нумеруют только в том случае, если в этом есть необходимость (например, при переносе длинной таблицы или когда в тексте есть ссылки на отдельные столбцы или строки).

Повторяющийся буквенный (но не цифровой) текст, если он состоит из одного слова, может быть заменен кавычками. Если повторяющийся текст содержит более одного слова, то при первом повторении его заменяют словами «То же», при следующих повторениях под словами «То же» ставят две пары кавычек. Пропуски в столбцах (за отсутствием данных) не оставляют пустыми, а заполняют знаком тире.

Числовые данные в таблицах не сопровождают единицами величин, а выносят последние в текст боковика, головки или общего названия таблицы.

Примечания и сноски к таблицам печатают непосредственно под ними, более мелким шрифтом (кегль 12), чтобы отделить текст сноски или примечания от последующего основного текста. Сноски к цифрам обозначаются только звездочками.

1.7. Формулы

Формулы набираются только в редакторе формул Equation 3.0, который на панели управления выглядит как $\sqrt{a}$. Если его там нет, необходимо выполнить следующие действия: *Вид – Панель инструментов – Настройка – Команды – Вставка –* $\sqrt{a}$ (редактор формул). Его следует выделить и вынести на панель управления.

При наборе формул рекомендуется использовать следующие размеры шрифтов: основной – 11, крупный индекс – 8, мелкий индекс – 7, крупный символ – 14, мелкий символ – 9.

Для того чтобы соблюсти все правила набора формул (латинские буквы – курсивом, греческие и русские – прямым, как в основном тексте, так и в индексах), необходимо в *Редакторе формул* использовать соответствующие стили: *Математический* – для латинских и греческих букв, *Текст* – для русских.

Прямым шрифтом также набираются:

– cos, sin, tg и другие тригонометрические функции;

– max, min, opt, lim, log, lg, const, det, exp;

– числа подобия – Ar (Архимеда), Bi (Био), Bo (Больцмана), Eu (Эйлера), Fo (Фурье), Gr (Грасгофа), M (Маха), Nu (Нуссельта), Pr (Прандтля), Re (Рейнольдса), St (Стантона) и др.;

– химические элементы и соединения;

– русские наименования единиц физических величин (м, кг, Вт, Ом).

Наиболее важные, а также длинные и громоздкие формулы выключают в отдельные строки. Так же располагают и все нумерованные формулы.

Экспликацию (расшифровку приведенных в правой и левой частях формулы буквенных обозначений величин) следует размещать в подбор, за словом «где» (без двоеточия после него). В конце каждой расшифровки ставят точку с запятой. Не следует начинать каждую расшифровку с новой строки, так как это снижает емкость листа. При большом числе формул с повторяющимися обозначениями целесообразно поместить в начале работы список обозначений с их расшифровкой и в экспликацию повторяющиеся обозначения не включать.

Перенос в формулах допускается делать на знаках соотношений, на отточии, на знаках сложения и вычитания и, в последнюю очередь, на знаке умножения в виде косого креста. Перенос на знаке деления не допускается. Математический знак, на котором прерывается формула, обязательно должен быть повторен в начале второй строки.

Нумеровать следует только наиболее важные формулы, на которые имеются ссылки в последующем тексте. Несколько небольших формул, составляющих единую группу, следует помещать в одну строку и объединять общим номером.

При нумерации формул, расположенных отдельными строками, номер помещают против середины группы формул. В работах, где нумеруется ограниченное число формул, рекомендуется использовать сквозную нумерацию. При ссылках на какую-либо формулу ее номер ставят точно в той же графической форме, что и после формулы, т.е. арабскими цифрами в круглых скобках. Например, «из уравнения (5) следует ...» и т.п.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1.8. Приложения

Если работа включает материалы, к которым читатель будет постоянно обращаться за справками, их желательно вынести в приложения за текст, где их проще и быстрее найти (таблицы количественных данных, стандартных показателей, картографический материал, иллюстративный материал – графики, схемы, диаграммы, фотографии, ксерокопии архивных документов и т.п.). Эти данные в работе выполняют справочно-вспомогательную роль.

Приложения помещаются после библиографического списка и не учитываются в общем объеме работы.

1.9. Содержание

Содержание раскрывает структуру работы и размещается в начале ВКР после титульного листа.

1.10. Ссылки на литературные источники

На все литературные источники (книги, статьи, ГОСТы, картографические материалы, архивные материалы, электронные ресурсы и т.п.) использованные (а также упоминаемые) при написании выпускной квалификационной работы даются ссылки в тексте. Ссылка приводится после упоминания автора использованной работы, цитирования или приведения данных из источника. Ссылка оформляется в круглых скобках, с указанием фамилий автора (авторов) или названия работы (коллективная монография, энциклопедические издания и т.п.) и года издания. При упоминании автора использованной работы в самом тексте в ссылке приводится только год издания. При упоминании зарубежного автора в ссылке приводится оригинальное написание фамилии автора и год издания.

Примеры оформления ссылок:

В.В. Сафонова отмечает, что проблемное обучение иностранному языку можно определить, как деятельность учителя по созданию и использованию на различных стадиях обучения иноязычных заданий [Сафонова 2009: 68].

Одним из первых учет ловушками применил Ч. Элтон и др. [Elton 1931], изучая в течение трех лет динамику численности мышей и полевок в окрестностях Оксфордского университета.

1.11. Список литературы (правила составления)

Список литературы – обязательный элемент любой исследовательской работы. В выпускных квалификационных работах в список следует включать всю использованную студентом литературу, на которую имеются ссылки в тексте. Список источников озаглавливается как **Литература** и помещается в конце работы перед **Приложением** (если в приложении нет ссылок на литературные источники) или после Приложения (если в последнем имеются ссылки на использованную литературу). Литературные источники располагаются в алфавитном порядке и нумеруются, сначала все издания на русском языке, затем – на иностранном.

2. ПРИМЕРЫ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ЗАПИСЕЙ

КНИГИ

ОДНОТОМНЫЕ ИЗДАНИЯ

Семенов, В. В. Философия: итог тысячелетий. Философская психология [Текст] / В. В. Семенов ; Рос. акад. наук, Пущин. науч. центр, Ин-т биофизики клетки, Акад. проблем сохранения жизни. – Пущино : ПНЦ РАН, 2000. – 64 с. – Библиогр.: с. 60-65. – ISBN 5-201-14433-0.

Ерина, Е. М. Обычаи поволжских немцев [Текст] = Sitten und Brauche der Wolgadeutchen / Екатерина Ерина, Валерия Салькова ; худож. Н. Стариков ; Междунар. союз нем. культуры. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Готика, 2002. – 102 с. : ил. – На обл. авт. не указаны. – Текст парал. рус., нем. – Библиогр.: с. 92-93. – ISBN 5-7834-0066-1.

Золотой ключик [Текст] : сказки рос. писателей : [для мл. и сред. шк. возраста] / сост. И. Полякова ; худож. В. Бритвин, Н. Дымова, С. Муравьев. – М. : Оникс, 2001. – 381 с. : ил. – (Золотая библиотека). – Содерж. авт.: А. Н. Толстой, Б. В. Заходер, А. М. Волков, Е. С. Велтистов, К. Булычев. – ISBN 5-249-00334-6 (в пер.).

Законодательные материалы

Запись под заголовком

Российская Федерация. Законы. Семейный кодекс Российской Федерации [Текст] : [федер. Закон : принят Гос. Думой 8 дек. 1995 г. : по состоянию на 3 янв. 2001 г.]. – СПб. : Victory : Стаун-кантри, 2001. – 94 с. – На тит. л.: Проф. юрид. системы «Кодекс». – ISBN 5-7931-0142-X.

Запись под заглавием

Гражданский процессуальный кодекс РСФСР [Текст] : [принят третьей сес. Верхов. Совета РСФСР шестого созыва 11 июня 1964 г.] : офиц. Текст : по состоянию на 15 нояб. 2001 г. / М-во юстиции РФ. – М. : Маркетинг, 2001. – 159 с. – ISBN 5-94462-191-5.

Стандарты

Запись под заголовком

ГОСТ 7.53-2001. Издания. Международная стандартная нумерация книг [Текст]. – Взамен ГОСТ 7.53-86 ; введ. 2002-07-01. – Минск : Межгос. совет по стандартизации, метрологии и сертификации ; М. : Изд-во стандартов, сор. 2002. – 3 с. – (Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу).

Запись под заглавием

Издания. Международная стандартная нумерация книг [Текст] : ГОСТ 7.53-2001. – Взамен ГОСТ 7.53-86 ; введ. 2002-07-01. – Минск : Межгос. совет по стандартизации, метрологии и сертификации ; М. : Изд-во стандартов, сор. 2002. – 3 с. – (Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу).

Сборники без общего заглавия

Гиляровский, В. А. Москва и москвичи [Текст] ; Друзья и встречи ; Люди театра / В. А. Гиляровский ; вступ. ст. и примеч. А. Петрова ; худож. И. Лыков. – М. : ЭКСМО-пресс, 2001. – 638 с. : ил. – (Русская классика). – ISBN 5-04-008668-7 (в пер.).

Носов, Н. Н. Приключения Незнайки и его друзей [Текст] : сказоч. повести / Николай Носов. Остров Незнайки : повесть : [для детей] / Игорь Носов ; [к сб. в целом] худож. И. Панков. – М. : ЭКСМО-пресс, 2001. – 638 с. : ил. – Содерж.: Приключения Незнайки и его друзей ; Незнайка в Солнечном городе / Николай Носов. Остров Незнайки / Игорь Носов. – ISBN 5-04-008687-3 (в пер.).

МНОГОТОМНЫЕ ИЗДАНИЯ

Гиппиус, З. Н. Сочинения [Текст] : в 2 т. / Зинаида Гиппиус ; [вступ. ст., подгот. текста и коммент. Т. Г. Юрченко ; Рос. акад. наук, Ин-т науч. информ. по обществ. наукам]. – М. : Лаком-книга : Габестро, 2001. – (Золотая проза серебряного века). – На пер. только авт. и загл. серии. – ISBN 5-85647-056-7. (в пер.).

Т. 1 : Романы. – 367 с. – Библиогр. в примеч.: с. 360-366. – Содерж.: Без талисмана ; Победители ; Сумерки духа. – В прил.: З. Н. Гиппиус / В. Брюсов. – ISBN 5-85647-057-5.

Т. 2 : Романы. – 415 с. – Содерж.: Чертова кукла ; Жизнеописание в 33 гл. ; Роман-царевич : история одного начинания ; Чужая любовь. – ISBN 5-85647-058-3.

Отдельный том

Казьмин, В. Д. Справочник домашнего врача [Текст]. В 3 ч. Ч. 2. Детские болезни / Владимир Казьмин. – М. : АСТ : Астрель, 2002. – 503 с. : ил. – ISBN 5-17-011143-6 (АСТ) (в пер.).

ДЕПОНИРОВАННЫЕ НАУЧНЫЕ РАБОТЫ

Социологическое исследование малых групп населения [Текст] / В. И. Иванов [и др.] ; М-во образования РФ, Финансовая академия. – М., 2002. – 110 с. – Библиогр.: с. 108-109. – Деп. в ВИНИТИ 13.06.02, № 145432.

НЕОПУБЛИКОВАННЫЕ ДОКУМЕНТЫ

Отчеты о научно-исследовательской работе

Состояние и перспективы развития статистики печати Российской Федерации [Текст] : отчет о НИР (заключ.) : 06-02 / Рос. кн. палата ; рук. А. А. Джиго ; исполн.: В. П. Смирнова [и др.]. – М., 2000. – 250 с. – Библиогр.: с. 248-250. – Инв. № 756600.

Диссертации

Кашапова, Л. М. Моделирование и реализация непрерывного этномузыкального образования как целостной национально-региональной образовательной системы [Текст] : автореф. дис. … д-ра пед. наук : 13.00.01 : защищена 22.01.06 : утв. 15.07.06 / Кашапова Ляля Мухаметдиновна. – Уфа, 2006. – 48 с. – Библиогр.: с. 42-47.

Кудинов, И. В. Формирование личности будущего учителя как субъекта педагогической деятельности в системе заочно-дистанционного обучения [Текст] : дис. … канд. пед. наук : 13.00.08 : защищена 24.06.06 : утв. 15.02.07 / Кудинов Илья Викторович. – Уфа, 2006. – 214 с. – Библиогр.: с. 159-180.

ИЗОИЗДАНИЯ

Графика [Изоматериал] : нагляд. Пособие для для образоват. учреждений по предмету «культура Башкортостана» : [комплект репрод. / авт.-сост. Н. И. Оськина ; слайды Л. А. Черемохина ; пер. на башк. яз. М. С. Аминовой]. – Уфа : Демиург, 2001. – 1 папка (24 отд. л.) : цв. офсет. – (Изобразительное искусство Башкортостана ; вып. 5). – Подписи к ил. парал. рус., башк.

НОТНЫЕ ИЗДАНИЯ

Эшпай, А. Я. Квартет [Ноты] : для 2 скрипок, альта и виолончели / Андрей Эшпай. – Партитура и голоса. – М. : Композитор, 2001. – 34 с., 4 парт. (68 с. партий разд. паг.). – Тит. л. парал. рус., англ. – Н. д. 10350.

КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ИЗДАНИЯ

Европа. Государства Европы [Карты] : [физическая карта] / сост. и подгот. к печати ПКО «Картография» в 1985 г. ; ст. ред. Л. Н. Колосова ; ред. Н. А. Дубовой. – Испр. в 2000 г. – 1 : 5000000, 50 км в 1 см ; пр-ция норм. кон. равнопром. – М. : Роскартография, 2000. – 1 к. : цв., табл. ; 106х89 см.

АУДИОИЗДАНИЯ

Роман (иеромон.). Песни [Звукозапись] / иеромонах Роман ; исп. Жанна Бичевская. – СПб. : Центр духов. просвещения, 2002. – 1 электрон. опт. диск. – (Песнопения иеромонаха Романа ; вып. 3).

ВИДЕОИЗДАНИЯ

От заката до рассвета [Видеозапись] / реж. Роберт Родригес ; в ролях: К. Тарантино, Х. Кейтель, Дж. Клуни ; Paramount Films. – М. : Премьер –видеофильм, 2002. – 1 вк. – Фильм вышел на экраны в 1999 г.

ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРЫ

Ресурсы локального доступа

Русская драматургия от Сумарокова до Хармса [Электронный ресурс]. – М. : ДиректМедиа Паблишинг, 2005. – 1 электрон. Опт. диск (CD-ROM). – (Электронная библиотека ДМ ; № 47). – Систем. требования: IBM PC и выше, 16

Мб RAM, CD-ROM, SUGA, Windows 95/98/ME/NT/XP/2000. – ISBN 5-94865-073-1.

Ресурсы удаленного доступа

Российская государственная библиотека [Электронный ресурс] / Центр информ. технологий РГБ ; ред. Власенко Т. В. ; Web-мастер Козлова Н. В. – Электрон. дан. – М. : Рос. гос. б-ка, 1997. - . – Режим доступа: http://www.rsl.ru, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус., англ.

Василенко, Л. А. Информационная культура в контексте глобальных изменений [Электронный ресурс] / Л. А. Василенко, И. Н. Рыбакова. – Режим доступа : www. URL: http://spkurdyumov.narod.ru/D48VasilinkoRybakova.htm. - 11.12.2004 г.

СОСТАВНЫЕ ЧАСТИ ДОКУМЕНТОВ

СТАТЬИ

Составная часть книги

Богданов, А. Между стеной и бездной. Леонид Андреев и его творчество [Текст] : вступ. ст. / А. Богданов // Андреев, Л. Н. Собр. соч. : в 6 т. – М., 1990. – Т. 1. – С. 5-40.

Статья из собрания сочинений

Выготский, Л. С. История развития высших психических функций [Текст] / Л. С. Выготский // Собр. соч. : в 6 т. – М., 1995. – Т. 3: Проблемы развития психики. – С. 2-328.

Статья из сборника

Хайруллина, Р. Х. Национально-культурная семантика языковых единиц [Текст] / Р. Х. Хайруллина // Международные Акмуллинские чтения : материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. М. Акмулле (22-23 мая 2008 г.) / отв. ред. Н. М. Жанпеисова ; Актюбинский ун-т им. С. Баишева. – Актобе, 2008. – С. 275-277.

Статья из сериального издания

Асадуллин, Р. М. Профессионально-педагогическое образование: проблемы модернизации [Текст] / Раиль Мирваевич Асадуллин // Педагогический журнал Башкортостана. – 2008. - № 3 (16). – С. 5-8.

РАЗДЕЛ, ГЛАВА

Глазырин, Б. Э. Автоматизация выполнения отдельных операций в Word 2000 [Текст] / Б. Э. Глазырин // Office 2000 : 5 кн. в 1 : самоучитель / Э. М. Берлинер, И. Б. Глазырина, Б. Э. Глазырин. – 2-е изд., перераб. – М., 2002. – Гл. 14. – С. 281-298.

РЕЦЕНЗИИ

Гаврилов, А. В. Как звучит? [Текст] / Андрей Гаврилов // Кн. обозрение. – 2002. – 11 марта (№ 10/11). – С. 2. – Рец. на кн.: Музыкальный запас. 70-е : проблемы, портреты, случаи / Т. Чередниченко. – М. : Новое лит. обозрение, 2002. – 592 с.

3. ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.М.АКМУЛЛЫ»

ИНСТИТУТ ФИЛОЛОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И МЕЖКУЛЬТУРНЫХ КОММУНИКАЦИЙ

Кафедра методики преподавания ИЯ и 2ИЯ
Направление 45.03.02 Лингвистика
Профиль – Теория и методика преподавания иностранных зыков и культур
Курс IV, группа 401 Л
заочная форма обучения

КУСИМОВА ГУЛЬНАРА ХАРИСОВНА

ОБУЧЕНИЕ ЧТЕНИЮ НА ОСНОВЕ ПРОБЛЕМАТИЗАЦИИ ТЕКСТОВ НА СРЕДНЕМ ЭТАПЕ ОБУЧЕНИЯ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.п.н., профессор В.Ф. Аитов

Работа допущена к защите__________________________
Заведующий кафедрой _____________________________
Дата представления_________________________________
Дата защиты_______________________________________
Оценка____
подпись научного руководителя

Уфа 2018

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ.М.АКМУЛЛЫ»

ЕСТЕСТВЕННО-ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра географии и
географического образования

Направление 050100 –
Педагогическое образование,
профиль «География»
Курс IV

ИВАНОВА СВЕТЛАНА ВИКТОРОВНА

ОСОБЕННОСТИ ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕРРИТОРИИ ПРОЕКТИРУЕМОГО ПРИРОДНОГО ПАРКА «ИРЕМЕЛЬ»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.г.н., проф. Р.Ш. Кашапов

Дата представления________________________________

Работа допущена к защите __________________________
дата и подпись заведующего кафедрой

Дата защиты______________________________________

Оценка____

Уфа 2018

Заведующему кафедрой

____

(название кафедры)

БГПУ им. М.Акмуллы

____

(Ф.И.О. заведующего, уч.степень)

студента (ки) _______________

____

(факультет, направлении/специальность)

____

(форма обучения)

____

(Ф. И.О. студента в родит.падеже)

ЗАЯВЛЕНИЕ.

Прошу закрепить за мной выпускную квалификационную работу на тему:____

____

____

____

____

(рабочее полное название темы)

Научный руководитель: _______________________________________

(фамилия, имя, отчество, должность, ученая степень, ученое звание)

Научный руководитель: ________________«Согласен»

(подпись)

Дата: ___________________

Подпись студента ______________________

(подпись)

Дата:____________________

Решение кафедры:

____

(утвердить, отклонить, доработать)

Зав. кафедрой___________________

(подпись)

Дата: ___________________________

Протокол № _____

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. АКМУЛЛЫ»
КАФЕДРА ___________________

4. ОБРАЗЦЫ СОПРОВОЖДАЮЩИХ ДОКУМЕНТОВ

3.1. Отзыв руководителя

О Т З Ы В   Р У К О В О Д И Т Е Л Я

На работу студента____
выполненную на тему____
____
1. Актуальность работы____
____
____
2. Научная новизна работы____
____
3. Оценка содержания работы_______________________________________
____
4. Положительные стороны работы___________________________________
____
5. Замечания____
____
____
6. Рекомендации по внедрению результатов работы______________________
____
____
7. Рекомендуемая оценка____
8. Дополнительная информация для аттестационной комиссии
____
____
Научный руководитель____
____
(подпись) (фамилия, имя, отчество)
____
______
(ученая степень, звание, должность, место работы)

дата

3.2. Рецензия

РЕЦЕНЗИЯ
на выпускную квалификационную работу студента(ки)
____факультета
____
____
(фамилия, имя, отчество студента)

Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы, выполненную на тему:____
____

---

1. Актуальность, новизна исследования_________________________________
____
____
____

2 Оценка содержания работы____
____
____
____

3 Отличительные, положительные стороны работы_______________________
____
____
____
____
____

4. Практическое значение и рекомендации по внедрению
____
____
____
____

5 Недостатки и замечания по работе___________________________________
____
____

6. Рекомендуемая оценка____
Рецензент_________________   _____________________
(подпись)   (фамилия, имя, отчество)

____
____
(ученая степень, звание, должность, место работы)

3.3. Заключение

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. АКМУЛЛЫ»
КАФЕДРА ___________________

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

Заведующего кафедрой ____

(фамилия, имя, отчество зав.кафедрой)

Квалификационная выпускная работа студента группы_____________________

____

____

(фамилия, имя, отчество студента)

выполненная на тему____

____

____

в объеме_______________ с., с приложением __________с.

соответствует установленным требованиям и допускается кафедрой к защите.

Заведующий кафедрой

«_____ »________________20___ г.

Примеры принятых сокращений слов и словосочетаний по ГОСТ 7.12-93

Слово (словосочетание)	Сокращение	Условия применения
1	2	3
Автор	Авт.	
Автореферат	Автореф.	
Авторское свидетельство	А.с.	
Академик	Акад.	При фамилии или названии учреждения
Ассоциация	Ассоц.	
Библиотека	Б-ка	
Введение	Введ.	
Включительно	Включ.	
Вопросы	Вопр.	
Выпуск	Вып.	
Высший	Высш.	
Глава	Гл.	При цифрах и в примечаниях
Город	г.	При названии
Государственный	Гос.	
График	Граф.	
Депонированный	Деп.	
Дискуссия	Дискус.	
Диссертация	Дис.	
Доклад	Докл.	
Доктор	Д-Р	В названии ученой степени
Дополнение	Доп.	
Доцент	Доц.	При фамилии или названии учреждения
Ежедневный	Ежедн.	
Журнал	Журн.	
Копия	Коп.	
Лаборатория	Лаб.	
Лист.	л.	При цифрах и в примечаниях
Литература	Лит.	
Математический	Мат.	
Медицинский	Мед.	
Месяц	Мес.	
Механический	Мех.	
Министерство	М-во	
Младший	Мл.	
Научный	Науч.	
Национальный	Нац.	
Общество	О-во	

Около	ок.	При цифрах
Ответственный	Отв.	
Оформление	Оформ.	
Патент	пат.	
Перевод	Пер.	
План	Пл.	
Председатель	Пред.	При названии учреждения
Приложение	Прил.	
Примечание	Примеч.	
Продолжение	Продолж.	
Производственный	Произв.	
Профессор	Проф.	При фамилии или названия учреждения
Раздел	Разд.	При цифрах и в примечаниях
Республика	Респ.	
Реферат	Реф.	
Рецензия	Рец.	
Санкт-Петербург	СПБ	В выходных данных
Сборник	Сб.	
Свыше	Св.	При цифрах
Сельскохозяйственный	С.-х.	
Серия	Сер.	
Смотри	См.	
Справочник	Спр.	
Статистический	Стат.	
Статья	Ст.	
страница	С.	При цифрах
Таблица	Табл.	
Титульный лист	Тит. л.	
Том	Т.	При цифрах
Указатель	Указ.	
Университет	Ун-т	
Учебник	Учеб.	
Факультет	Фак.	
Филиал	Фил.	
Часть	Ч.	
Энциклопедия	Энцикл.	

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ.
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ. БАШКИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.
АКМУЛЛЫ.

З.Ш. Каримов

Теория функций действительной переменной.

Задачник – практикум и методические указания для студентов
направления педагогическое образование, специальностей «математика –
информатика», «математика – физика».

Уфа 2022 г.

УДК 517.51
ББК 22.162
К 23

Каримов З.Ш.
Теория функций действительной переменной
Задачник – практикум и методические указания для студентов направления педагогическое образования, специальностей «математика – информатика», «математика – физика».
[Текст] / З.Ш.Каримов – Уфа: Изд-во БГПУ, 2022 – с.(52)

Методические рекомендации написаны как дополнение к аудиторным практическим занятиям, они будут полезны и для самостоятельной работы. Приведены образцы решения таковых задач.

Рецензенты:

А.М.Гайсин, д-р ф. – м.н. профессор (Институт математики с ВЦ. УНЦ РАН)
В.Ф.Вильданова, к.ф. – м.н. доцент (Институт математики с ВЦ. УНЦ РАН)

ISBN 978-5-907176-64-5

Содержание

Элементы теории множеств

§1. Операции над множествами

Используются следующие определения и обозначения:

$x \in A$ – элемент x принадлежит множеству A, $x \notin A$ – элемент x не принадлежит множеству A.

Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то A называют подмножеством множества B и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B называют равными и пишут $A = B$.

Множество не содержащее ни одного элемента называют пустым и обозначают $\emptyset$.

Объединением множеств A и Bназывается множество всех элементов, принадлежащих хоты бы одному из множеств A и B. Это множество обозначают $A \cup B$.

Объединением произвольного конечного или бесконечного семейства множеств $\{A_\alpha\}$ называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.

Объединение множеств $A_1, \dots, A_n$ обозначают

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

объединение бесконечной последовательности множеств $A_1, A_2 \dots$ –

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Пересечением множеств A и B называется множество всех элементов, принадлежащих обоим этим множествам. Обозначают пересечение $A \cap B$.

Пересечением произвольного множества $\{A_\alpha\}$ называется множество всех элементов, принадлежащих всем этим множествам. Пересечение множеств $A_1, \dots, A_n$ – обозначают

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k,$$

пересечение бесконечной последовательности множеств $A_1, A_2 \dots$ –

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

Непосредственно из определений операций $\cap$, $\cup$ следует их коммутативность и ассоциативность

$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

Если множества A и B не имеют общих элементов, т.е., если $A \cap B = \emptyset$, то эти множества называются непересекающимися.

Разностью множеств A и B называется множество всех тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. Это множество обозначают $A \setminus B$.

Если $A \in X$, то множество $X \setminus A$ называют дополнением множества A до X.

1.1. Доказать $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Доказательство. Пусть $x \in C$, $x \in A \cup B$, т.е. $x \in A$ либо $x \in B$.

Пусть $x \in A$, отсюда $x \in A \cap C$, значит $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Итак, $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Пусть теперь $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, значит $X \in A \cap C$ либо $x \in B \cap C$.

Пусть $x \in A \cap C$, т.е. $x \in A$ и $x \in C$, т.е. $x \in (A \cup B) \cap C$, отсюда $(A \cup B) \cap C \supset (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Окончательно $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

1.2. Доказать $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

1.3. Доказать $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

1.4. Доказать $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Для подмножеств множества X вводится понятие характеристической функции определенная на X.

Характеристической функцией множества $A \in X$ называется функция $X_A(x) = X(A, x) = \begin{cases} 1, \text{\textit{если} } x \in A \\ 0, \text{\textit{если} } x \notin A \end{cases}$

1.5. Написать условие на характеристическую функцию множества, если $A = \emptyset$.

Поскольку $\{\emptyset\}$ не содержит ни одного элемента, т.е. $\forall x,\ x \notin A = \emptyset$, значит $X(\emptyset, x) \equiv 0$.

1.6. Написать условие на характеристические функции множеств

а) $A \subset B$

б) $A = B$

1.7. Представить характеристические функции множеств

1) $A \cap B$

2) $A \cup B$

3) $A \setminus B$

4)

$$\bigcap_{\alpha} A_\alpha$$

5)

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha$$

1.8. Доказать 1.1. выражая действие над множествами через их характеристические функции.

$(AvB) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Воспользуемся условиями на характеристические функции эквивалентные соотношениям 1) $A = B$, 2) $A \cap B$, 3) $A \cup B$.

$A = B \sim X(A, x) \equiv X(B, x)$

$A \cap B \sim X(A, x) \cdot X(B, x)$

$A \cup B \sim X(A, x) + X(B, x) - X(A, x) \cdot X(B, x)$

Решение.

$X\{[(A \cap C) \cup (B \cap C)], x\} = X(A \cap C, x) + X(B \cap C, x) -$
$X(A \cap C, x) * X(B \cap C, x) = X(Ax) * X(Cx) + X(Bx) * X(Cx) -$
$X(Ax) * X(Cx) * X(Bx) * X(Cx) = X(Cx)[X(Ax) + X(Bx) -$
$XAx*XBx=$

т.к. $X(C, x) * X(C, x) = X(C, x)$

$=X\{[(A \cup B) \cap C], x\}$ т.е. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cup C)$

1.9. Доказать 1.2, 1.3, 1.4 выражая действия над множествами через их характеристические функции.

Симметрической разностью двух множеств A и B называется сумма разностей множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Таким образом $(A \setminus B \cup B \setminus A$.

Симметричная разность обозначается $A \Delta B$. Непосредственно из определения следует коммутативность операции Δ:

$A \Delta B = B \Delta A$.

1.10. Доказать $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$ дистрибутивность операций Δ и $\cap$.

1.11. Доказать $(A \Delta B) \setminus C = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C)$ дистрибутивность операций Δ и $\setminus$.

1.12. Даны множества A, B, C.

С помощью теоретико-множественных операций записать множество элементов, которые принадлежат:

а) всем трем множествам;

б) по крайней мере двум из этих множеств;

в) любым двум из этих множеств, но не принадлежат всем трем;

г) по крайней мере одному из этих множеств;

д) любому одному из этих множеств, но не принадлежат двум остальным.

Решение.

б) Допустим $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$

Возьмем $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Это множество принадлежит всем трем множествам, значит по крайней мере двум множествам.

Пусть теперь $A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $C \cap A = \emptyset$, тогда $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ принадлежит множествам A и B, т.е. двум множествам.

Значит множество не может принадлежать только одному из множеств A, B, C.

Непустой набор множеств R называется кольцом, если он замкнут относительно операций Δ и $\cap$, т.е. если для любых множеств A и B из R и R принадлежат также $A\Delta B$ $и$ $A \cap B$.

1.13. Доказать, что кольцо замкнуто также относительно операций $\cup$ и \.

1.14. Доказать, что получим эквивалентное определение кольца множеств, если потребовать замкнутость относительно операций

1) $\cup$ $и$ \

2) $\cup$ $и$ Δ

3) \ и Δ

1.15. Пусть $\{A_\alpha\}$ – произвольное семейство подмножеств множества X. Доказать следующие свойства дополнений множеств (законы двойственности)

1)

$$X\backslash(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha (X\backslash A_\alpha)$$

2)

$$X\backslash(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha (X\backslash A_\alpha)$$

§2. Мощность множеств.

Два множества называются эквивалентными или имеющими одинаковую мощность, если между элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Если множества A и B эквивалентны, то пишут $A \sim B$.

Из определения следует, что конечные множества эквивалентны только в том случае, если имеют одинаковые количество элементов.

Множество эквивалентное множеству натуральных чисел называется счетным.

Иначе, множество счетно, если его можно представить в виде последовательности $a_1, a_2, \ldots$

2.1. Доказать, что каждое бесконечное множество одержит счетное подмножество.

2.2. Доказать, что если множество A бесконечно, а B счетно, то $(A \cup B) \sim A$.

2.3. Доказать, что всякое конечное множество не может быть эквивалентен своей собственной части.

2.4. Доказать счетность множества простых чисел.

2.5. Доказать, что всякое конечное множество действительных чисел имеет наибольший элемент.

2.6. Доказать, что всякое бесконечное множество может быть разложено на счетное число бесконечных и попарно не пересекающихся множеств.

2.7. Какова мощность множества всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты.

2.8. Доказать, что множество всех окружностей, радиусы которых рациональны и координаты центра которых – рациональные числа, счетно.

2.9. Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции, заданной на $[a, b]$, конечно или счетно.

2.10. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества E на прямой больше единицы, то множество E конечно или счетно.

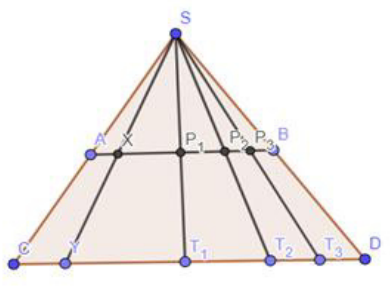
2.11. На прямой задано множество попарно не пересекающихся отрезков. Что можно сказать о мощности этого множества?

2.12. Можно ли считать, что функции
$y = 3x + 5$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между множеством значений аргумента и множеством значений функции? В случаях, когда ответ отрицательный, можно ли получить положительный ответ после соответствующего изменения области определения функции?

2.13. Доказать, что множество целых чисел счетно.

2.14. Построить биективное отображение отрезка $[C, D]$ и интервала (A, B).

Решение.



Пусть $|A, B| < |C, D|$ и пусть
T_1 – середина CD
T_2 – середина T_1D
T_3 – середина T_2D и т.д.

$P_1, P_2, P_3, \ldots$ точки пересечения отрезков $ST_1, ST_2, ST_3, \ldots$ с (AB).

Сопоставим точке P_1 точку C, точке P_2 – точку D. Сопоставим далее точке P_3 точку T_1, точке P_4 точку T_2 и т.д.

Далее любой точке x не совпадающей с $P_1, P_2, \ldots$ поставим в соответствие точку y на $[C, D]$ как точку пересечения с прямой SX.

2.15. Построить биекцию между отрезком (0,1] и интервалом (0,1).

2.16. Построить биективное отображение интервала (0,1) на множестве всех действительных чисел R.

2.17. Отобразить биективно множество всех последовательностей натуральных чисел на множестве всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел.

Решение. Пусть $x = (n_1, n_2, n_3, \ldots)$, $n_i \in N$. Такой последовательности поставим в соответствие последовательность $y = (n_1, n_1 + n_{2,} n_1 + n_2 + n_3, \ldots)$.

Эта последовательность строго возрастающая. Такое соответствие является биекцией. В самом деле прообраз $f^{-1}(y)$ не пуст и состоит только из одной последовательности.

2.18. Отобразить биективное множество всех последовательностей натуральных чисел на множестве чисел полуинтервала (0,1]

Решение. Рассмотрим множество М всех строк возрастающих последовательностей натуральных чисел. Известно, что каждое числе α из полуинтервала (0,1] можно разложить единственным способом в бесконечную двоичную дробь $\alpha = 0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots$и обратно: каждая бесконечная двоичная дробь определяет единственное число из полуинтервала (0,1].

Сопоставим последовательности $x = (n_1, n_2, n_3 \ldots]$, где $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ двоичную дробь, у которой на местах с номерами $n_1, n_2, n_3, \ldots$ стоят единицы, а на остальных местах нули. Например, последовательность $x_1 = (2, 4, 6, 8, \ldots)$ ставится в соответствие дробь 0,01010101…

Тем самым построено отображение f множества M в полуинтервале (0,1]. При этом у любой точки $y \in (0{,}1]$ прообраз $f^{-1}(y)$ не пуст и состоит одной последовательности.

Чтобы ее найти, достаточно представить y в виде бесконечной двоичной дроби и записать последовательности, представляющие собой последовательные номера тех разрядов дроби, которые содержат единицу.

Итак, $f\colon M \to B$ биективно.

Если теперь рассмотреть отображение ϕ $A \to M$, построенное в 2.17, то композиция $f^{\mathrm{O}}\phi$ есть искомая биекция.

2.19. Доказать, что соотношение $A \subset B, A = A \cap B, B = A \cup B$ между множествами A и B определяет их эквивалентность.

Теорема Контора-Бернштейна.

Если множество A эквивалентно некоторому подмножеству $B_1 \subset B$, а множество B эквивалентно некоторому подмножеству $A_1 \subset A$, то A эквивалентно B.

Линейная функция $y = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}$ биективно отображает любой отрезок $[a, b]$ на отрезок $[c, d]$ и так же биективно (a, b) на (c, d).

Теорема Контора-Бернштейна позволяет установить эквивалентность произвольных отрезка и интервала (см. 2.14) гораздо проще. Достаточно взять произвольный отрезок внутри интервала и произвольный интервал внутри отрезка.

2.20. Доказать эквивалентность точек круга и квадрата.

2.21. Доказать эквивалентность множества всех непрерывных функций отрезка $[a, b]$ и множества точек отрезка $[a, b]$.

Решение. Рассмотрим множество Q всех рациональных точек отрезка $[a, b]$, занумерованное каким-либо образом: $Q = \{z_1, z_2, \dots\}$.

Это возможно, поскольку Q множество счетное. Поставим в соответствие непрерывной на $[a, b]$ функции f последовательность действительных чисел $f(z_1), f(z_2),$. Так как непрерывная функция на $[a, b]$ полностью определяется своими значениями в точках множества Q, то тем самым устанавливается взаимооднозначное соответствие между множеством всех непрерывных функций на $[a, b]$ и частью множества всех последовательностей действительных чисел.

С другой стороны, все функции, постоянные на отрезке $[a, b]$ эквивалентны точкам отрезка. Применяя теорему Контора-Бернштейна получаем искомое утверждение.

Множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq x \leq 1$, нечетно.

Множество, эквивалентное множество действительных чисел, принадлежащих отрезку $[0, 1]$, называется множеством мощности, континуума, или мощности C.

Из данного параграфа следует, что всякий сегмент, интервал и полусегмент являются множествами мощности континуума.

2.22. Доказать, что множество всех иррациональных чисел имеет мощность континуума.

2.23. Доказать, что множество точек непрерывной кривой $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ имеет мощность континуума.

2.24. Какова мощность множества M всех окружностей на плоскости.

Решение. Рассмотрим произвольную окружность и запишет ее уравнение $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Сопоставим окружности точку (a, b, z) пространства R^3. Тем самым определено биективное отображение множества M на верхнее полупространство R^3+.

Итак, M и R^3+ имеют одинаковую мощность (эквивалентны). Но, так как $R^3 + \subset R^3$ и R^3+ содержит некоторую прямую, тогда по теореме Контора-Бернштейна мощность M равна c поскольку мощность R^3 равна c.

2.25. Какова мощность множества эллипсов на плоскости, оси которых совпадают с осями координат?

2.26. Какова мощность всех многочленов третьей степени с действительными коэффициентами?

2.27. Какова мощность множества всех парабол на плоскости, оси которых параллельны оси ординат?

2.28. Какова мощность множества M всех действительных чисел, заключённых между 0 и 1, в разложении которых в бесконечную десятичную дробь имеется цифра 7?

Решение. Разобьём отрезок $[0, 1]$ на 10 равных частей и возьмём интервал $(0{,}7; 0{,}8)$. Ясно, что $(0{,}7; 0{,}8) \subset M$.

Отсюда следует, что мощность множества M не меньше c. С другой стороны, $M \subset [0, 1]$, значит, мощность множества М не больше чем c. Итак, мощность континуума.

2.29. Какова мощность множества всех действительных чисел, заключённых между 0 и 1, в разложении которых в бесконечную десятичную дробь отсутствует цифра 7?

2.30. Какова мощность множества всех действительных чисел, заключённых между 0 и 1, в разложении которых в бесконечную десятичную дробь цифра 7 находится на третьем месте?

§3. Метрические пространства.

Открытые замкнутые множества.

Множество X снабжено метрикой, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие неотрицательное число $p(x, y)$ (расстояние между x и y) удовлетворяющее следующим аксиомам (аксиомы метрики):

1) $p(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$ (*аксиома тождества*)
2) $p(x, y) = p(y, x)$ *для любых* $x \in X, y \in X$ (*аксиома симметрии*)
3) $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y)$ *для любых* $x, y, z \in X$ (*аксиома треугольника*)

Множество X с введённой в нем метрикой называется метрическим пространством и обозначается (X, p). При этом множество X называют носителем метрического пространства (X, p).

Метрическое пространство (X, p) часто обозначается так же, как его носитель X, если по смыслу ясно, о какой метрике идёт речь. Последовательность $x_1, x_2, \dots x_n, ..(\{x_n\})$ элементов метрического пространства X сходится к элементу $b \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех n выполняется неравенство $p(x_n, b) < \varepsilon$ и b называется пределом последовательности $\{x_n\}, b = lim x_n$

Пусть в одном и том же множестве X введены две метрики $p_1 и\, p_2$. Если для дабой последовательности $\{x_n\}$ из $p_1(x_n, a) \to 0$ следует, что $p_2(x_n, a) \to 0$ и обратно, то говорят, метрик $p_1 и\, p_2$ эквивалентны.

Числовая прямая является метрическим пространством, где в качестве метрики принято $p(x, y) = |x - y|$.

3.1. Показать, что $p_1(x, y) = arctg|x - y|$ является метрикой в множестве чисел. Эквивалентно ли оно метрике $p(x, y) = |x - y|$?

Решение. Выполнение аксиом 1 и 2 очевидно. Для любых x, y, z $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

Докажем для любых α>=0, β≥ 0 имеет место неравенство $arctg(\alpha + \beta) \leq arctg\alpha + arctg\beta$

Для этого достаточно показать, что при фиксированном β> 0 функция

$$f(\alpha) = arctg\alpha + arctg\beta - arctg(\alpha + \beta) \text{ возрастает} f(0) = 0$$

$$f^{'}(\alpha) = \frac{1}{1+d^2} - \frac{1}{1+(\alpha+\beta)^2} = \frac{2\alpha\beta+\beta^2}{(1+\alpha^2)(1+(\alpha+\beta)^2)} > 0$$

Метрики p $и$ p_1 эквивалентны. Пусть $|x_n - a| \to 0$ при $n \to \infty$.

3.2. Пусть X – множество всех пар чисел (a, b).

Для любых двух его элементов $x(a_1, b_1) и\ y(a_2, b_2)$ положим:

а) $p_1(x, y) = \max|a_2 - a_1|, |b_2 - b_1|\}$;

б) $p_2(x, y) = |a_2 - a_1| + |b_2 - b_1|$;

в) $p_3(x, y) = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$

Доказать, что p_1, p_2, p_3 удовлетворяют аксиомам метрики и все метрики p_1, p_2, p_3 эквивалентны.

Решение. а) Из неравенства треугольника в R^1 имеем

$$|a_2 - a_1| \le |a_3 - a_2| + |a_3 - a_2|$$

$$|b_2 - b_1| \le |b_3 - b_2| + |b_3 - b_1|$$

Допустим, $\max\{|a_2 - a_1|, |b_2 - b_1|\} = |a_2 - a_1|$.

Тогда $\max\{|a_2 - a_1|, |b_2 - b_1|\} \le |a_3 - a_2| + |a_3 - a_1| \le \max\{|a_3 - a_2|, |b_3 - b_2|\} + \max\{|a_3 - a_2|, |b_3 - b_1|\}$

Аналогично, если $\max\{|a_2 - a_1, b_2 - b_1|\} = |b_2 - b_1|$.

Итак, неравенство треугольника для метрики p_1 установлено, аксиомы тождества и симметрии очевидно.

Покажем эквивалентность метрик p_1, p_2, p_3.

Эквивалентность следует из следующих неравенств, справедливых для любых a_1, a_2, b_1, b_2.

$$|a_2 - a_1| + |b_2 - b_1| \le 2\max|a_2 - a_1|, |b_2 - b_1|\} \le$$
$$\le 2\sqrt{|a_2 - a_1|\hat{}2 + |b_2 - b_1|^2}$$
$$\le 2(|a_2 - a_1| + |b_2 - b_1|)$$

3.3. Является ли метрикой на прямой следующая функция

$$p(x, y) = |arctgx - arctgy|$$

3.4. Является ли метрикой на прямой следующие функции

а) $p(x, y) = |x^2 - y^2|$

б) $p(x, y) = |x^3 - x^3|$

в) $p(x, y) = (x^2 + 2y^2) \bullet |x - y|$

3.5. Является ли метрикой на множестве натуральных чисел функция:

$$p(x, y) = \frac{|x - y|}{xy}$$

3.6. Доказать, что если p – метрика на M, то функция $p_1(x, y) = \frac{p(x,y)}{1+p(x,y)}$ так же является метрикой на M.

Решение. Выполнение первых двух аксиом метрики для p_1 очевидно. Проверим аксиому треугольника. Пусть

$$p(x, y) = a, p(x, z) = b\ и\ p(y, z) = c\ (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0).$$

Тогда $p_1(x, y) = \frac{a}{1+a}, p_1(x, z) = \frac{b}{1+b}, p_1(y, z) = \frac{c}{1+c}$.

Поскольку p – метрика $a \leq b + c$, поэтому $p_1(x, y) = \frac{a}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a} \leq 1 - \frac{1}{1+b+c} = \frac{(b+c)}{1+b+c} = \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = p_1(x, z) + p_1(y, z)$.

3.7. Доказать, что если $p_1, p_2, \dots, p_n$ метрики на множестве M, то для любых положительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ функция $p(x, y) = \sum^n \lambda_i p_i(x, y)$ так же является метрикой на M.

3.8. Пусть функция f определена на $[0, +\infty)$ и обладает следующими свойствами

1) $f(0) = 0$

2) f возрастает на $[0, +\infty)$;

3) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ для любых x, y из $[0, +\infty)$

Доказать, что если p – метрика на некотором множестве A, то $p_1(x, y) = f\big(p(x, y)\big)$ так же метрика на A.

Пусть X – какое-либо метрическое пространство. Элементы этого пространства называют точками. Окрестности точки $x_0 \in X$ называется множество $V(x_0, \mathcal{E})$ всех точек $x \in X$ удовлетворяющих условию $p(x, x_0) < \mathcal{E}$. При этом число $\mathcal{E} > 0$ называют радиусом окрестности, точку x_0 – центром. Окрестность $V(x_0, \mathcal{E})$ называют так же открытым шаром радиуса $\mathcal{E}$ с центром x_0.

Важное свойство окрестностей: если $y \in V(x_0, \mathcal{E})$, то существует число $\gamma > 0$ такое, что $V(y, \gamma) \subset V(x_0 \mathcal{E})$.

Пусть E какое-либо множество метрического пространства X. Принята следующая классификация точек пространства X по отношению и множества E.

$X_0 \in X$ точка прикосновения множества E, если в любой ее окрестности имеется хотя бы одна точка из E? Если в E имеется последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся к x_0, то x_0 – точка прикосновения множества E, и обратно, если x_0 – точка прикосновения множества Е, то в E найдётся последовательность сходящаяся к x_0.

Множество всех точек прикосновения множества E называются замыканием множества E и обозначается $\bar{E}$. Ясно, что $E \subset \bar{E}$.

Точка $x_0 \in X$ называется внутренней точкой множества E, если существует окрестность $V(x_0)$, содержащаяся в E.

Предельной точкой множества E называется точка $x_0 \in X$, в любой окрестности которой имеется хотя бы одна точка из E, отличная от x_0.

Множество всех предельных точек называется его производным множеством и обозначается E'.

Ясно, что любая предельная точка x_0 множества E является точкой прикосновения, но не наоборот. Допустим, $x_0 \in E$ и существует окрестности x_0, сводная от точек E. Тогда x_0 – точка прикосновения E, но не является предельной точкой. Тогда x_0 называется изолированной точкой множества E, если $x_0 \in E$, причём в некоторой ее окрестности $V(x_0)$ нет других точек из E(кроме самой точки x_0).

Точка x_0 называется граничной точкой множества E, если в любой окрестности этой точки имеются точки, как принадлежащие E, так и точки не принадлежащие E.

Очевидно $\bar{E} = E' \cup E$.

Множество E в метрическом пространстве называется замкнутым, если оно содержит все свои прикосновения.

Иначе говоря, $E = \bar{E}$.

Если множество замкнуто и не содержит изолированных точек, то это множество называется совершенным.

Множество E в метрическом пространстве X называется открытым, если все его точки внутренние.

Множество M плотно в G, если $G \subset \dot{M}$.

M плотно в пространстве X, если $\dot{M} = X$ (всюду плотно).

Множество M нигде не плотно в пространстве X, если каждый шар этого пространства содержит а себе некоторый шар, свободный от точек множества M.

3.9. Может ли множество, состоящее из изолированных точек иметь предельные точки?

Решение от противного. Допустим, множество имеет предельную точку x_0. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$ изолированных точек такая, что $x_n \to x_0$. Отсюда следует, $f(x_n, x_m) \to 0 n, m \to \infty$, что противоречит изолированности точек X_n. Нет.

3.10. Доказать следующие определения замкнутого множества:

а) множество называется замкнутым, если оно включает все своим точки прикосновения;

б) множество называется замкнутым, если оно включает в себя все свои предельные точки;

в) множество называется замкнутым, если оно включает в себя все свои граничные точки; эквиваленты.

Решение. Пусть множество E замкнуто в смысле определения (а), т.е. содержит все свои точки прикосновения. Любая предельная точка является точкой прикосновения.

Отсюда следует, что если E содержит предельные точки, они же являются точками прикосновения. Изолированная точка не является предельные, но она элемент E.

Значит, E замкнуто в смысле определения (б). С другой стороны, точка прикосновения может быть и граничной точкой, а любая граничная точка является точкой прикосновения. Значит, определение (а) эквивалентно определению (в).

3.11. Пусть M – любое множество. Положим

$$p(x, y) = 1, \textit{если } x \neq y$$

$$p(x, y) = 0, \textit{если } x = y$$

Проверить выполнение аксиом метрики.

Что представляет собой открытые и замкнутые шары в этом метрическом пространстве?

Решение. Пусть радиус $r > 0$. Центр шара $x_0 -$ изолированный элемент M.

Тогда $p(x_0, x) < r$ – это множество M.

Также $p(x_0, x) \leq r$ – множество M.

Открытый и замкнутый шар радиуса > 1 – все множество M.

Также, если $r = 1$ $p(x_0, x) < 1$ – одна точка x_0, т.е. открытый шар радиуса 1 – одна точка – центр шара.

Замкнутый шар $p(x_0, x) \leq 1$ – множество M.

Если $r < 1$

$p(x_0, x) < r$ – центр шара – одна точка.

$p(x_0, x) \leq r$ – то же самое.

3.12. Что представляет собой открытые и замкнутые шары задачи 3.1?

3.13. Могут ли в некотором метрическом пространстве два открытых шара различных радиусов совпадать между собой?

3.14. Является ли множество E непрерывных функций, удовлетворяющих условию $A < f(x) < B, A\ и\ B$ фиксированные числа, открытым в пространстве $\subset[a,b]$? (т.е. с метрикой $p(x(t), y(t) = \max|x(t) - y(t)|, a \leq t \leq b)$.

Решение. Пусть $f_0(x)$ произвольная точка множества, т.е. $A < f_0(x) < B$ для любого значения $x \in [a,b]$.

Обозначим $\max f_0(x) = \beta, \min \mathrm{f_0(x)} = \alpha$
$x \in [a,b]$

β не может быть равным B, поскольку $f_0(x)$ функция непрерывная на $[a,b]$, и в некоторой точке она достигает β т.е. $\beta < B$.

Аналогично $\alpha > A$.

Обозначим через Ɛ наименьшее из чисел $\alpha - A\ и\ B - \beta$. Тогда все функции $f(x)$, удовлетворяющие для каждого $x \in [a,b]$ неравенствам $f_0(x)$ −Ɛ< $f(x) < f_0(x)$ +Ɛ образуют окрестность точки $f_0(x)$.

Итак, вместе с функцией $f_0(x)$ в множество E входит также некоторая ее окрестность, а это означает, что E – открытое множество $b \subset [a,b]$.

3.15. Пусть F – фиксированная непрерывная функция на $[a,b]$. Доказать, что множество непрерывных функций f, удовлетворяющих для всех $x \in [a,b]$ неравенству $f(x) > F(x)$ множество открытое.

3.16. Пусть f – непрерывная функция, определенная всюду на оси Ox. Доказать, что множество E_a тех точек оси Ox, где $f(x) \geq a$ замкнуто.

Решение. Пусть x_0 – предельная точка множества E_a, т.е. в E_a существует последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к x_0.

Тогда $f(x_0) = \lim \mathrm{f}(x_0)$
$n \to \infty$

Так как $f(x_n) \geq a, то\ и\ f(x_0) \geq a, т.е. x_0 \in E_a$.

3.17. Пусть f_0 – фиксированная непрерывная функция на $[a,b]$, доказать, что множество E всех непрерывных функций f на $[a,b]$, удовлетворяющих неравенству $f(x) \leq f_0(x)$ для всех $x\ из\ [a,b]$, замкнуто в пространстве $C[a,b]$.

3.18. Доказать, что замыкание Ē множества E есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих E.

Решение. Вначале докажем, что замыкание каждого множества есть множество замкнутое. Пусть x_0 – точка прикосновения множества Ē. Тогда любая окрестность $V(x_0)$ содержит точки из Ē, пусть это x_1.

Тогда $V(x_1)$ содержит точку x_0 т.е. $x_0 \in$ Ē, Ē – замкнуто.

Если $M_\alpha -$ произвольное замкнутое множество, содержащее Ē (Ē$\subset M_\alpha$), т.е. Ē$\subset \bigcap_\alpha M_\alpha$

Так как в частности Ē$= M_\alpha$, то Ē$=\cap M_\alpha$.

3.19. Доказать, что если $A \subset B$, то Ā⊂B. Верно ли обратное включение?

3.20. Доказать, что граница ɣE любого множества E замкнуто.

3.21. Доказать, что дополнение замкнутого множества открыто, открытого множества замкнуто.

Решение. Пусть E замкнуто. Дополнение CM. Пусть $x_0 \in CM$. Допустим от противного, что какая бы ни была окрестность $V(x_0), V(x_0)$ не принадлежит CM.

Отсюда следует, что x_0 – точка прикосновения множества E $x_0 \in E$. Получили противоречие.

3.22. Пусть E – множество точек (x,y) таких, что $-1 < x \leq 1, -1 < y1$.

Требуется найти Ē, ɣE.

3.23. Требуется найти множество ɣE\E, если E – множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношениям:

а) $x = \frac{1}{n}, |y| \leq \frac{1}{n}$;

б) $x = \frac{1}{n}, |y| \geq \frac{1}{n}$;

в) $x = \frac{1}{n}, |y| \leq n$;

г) $x = \frac{1}{n}, |y| \geq n$, где $n \in N$.

3.24. Какие из следующих множеств всюду плотны на координатной плоскости?

а) Множество точек, обе координаты которых рациональны;

б) множество точек, обе координаты которых иррациональны;

в) множество точек, обе координаты которых целые;

г) множество точек, хоть одна координата которых – целая;

д) множество точек, одна из координат которых рациональная;

е) множество точек окружности $x^2 + y^2 \leq 1$.

Решение (а). Пусть $M(x_0, y_0)$ – произвольная точка. Ɛ – окрестность этой точки, содержит рациональную точку $P(z', z'')$, где $x_0 - \frac{2}{\sqrt{2}} < z' < x_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, y_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < z'' < y_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ т.е. множество всюду плотно в R^2.

(в). Пусть E – множество R^2 точек, обе координаты которых целые. Точками прикосновения E являются точки вида $P(m, n)$ $m \in Z, n \in Z$ и только они. Значит, E не является всюду плотным в R^2.

3.25. Доказать, что множество E точек отрезка $[0, 1]$, десятичное разложение которых возможно без цифр 4 и 5, является нигде не плотным совершенным множеством.

Решение. Разделим отрезок $[0,1]$ на десять равных частей и удалим интервал $(0,4; 0,6)$. Эти отрезки называются отрезками первого ранга. Затем каждый из оставшихся отрезков первого ранга разделим на десять равных частей и удалим из них два средних интервала, т.е. из отрезка $[0; 0,1]$ удалим интервал $(0,14; 0,16)$. Затем каждый из оставшихся отрезков второго ранга делим на десять равных частей и удаляем два средних интервала вместе с разделяющей их точкой и т.д.

Ясно, что оставшееся множество и есть множество E.

Докажем, что E нигде не плотно на $[0,1]$, т.е. любой шар на $[0,1]$ (в данном случае это интервал) содержит шар, не содержащий точек множества E.

Пусть $\alpha = 0, a_1, a_2, \dots a_n \dots$

В= $0, a_1, a_2, \dots, a'_n, \dots$

причём $a_i \neq 4{,}5$ для любого i, α и β сколь угодно близки. Между α и β лежат дроби $0, a_1, a_2, \dots . a_{n-1}1, 0, a_1, a_2, \dots a_{n-1}11$ и т. д.

То есть(α, β) свободен от точек E.

Множество E совершенно, т.е. $E = \bar{E}$.

Любая точка E является точкой прикосновения E. С другой стороны, любая точка, не принадлежащая E, не может быть точкой прикосновения для E, поскольку, как было показано выше, найдётся интервал, не содержащий точек из E.

3.26. Является ли множество E чисел из $[0, 1]$, десятичная запись которых содержит лишь числа 1 и 2, нигде не плотным в R?

3.27. Какие из множеств задачи 3.24 нигде не плотны на координатной плоскости?

3.28. Построим множество E на отрезке $[0, 1]$ следующим образом: зададим произвольную последовательность положительных чисел $\{a_n\}$, образующую сходящийся ряд, сумма которого меньше 1. Исключим из $[0, 1]$ интервал длины a_1 с центром в середине отрезка; далее из оставшихся двух отрезков удалим интервалы длины $\frac{a_2}{2}$ с центром в серединах этих отрезков; затем из оставшихся четырёх отрезков удалим интервалы $\frac{a_3}{2^2}$ с центрами в серединах этих отрезков и т.д.
Оставшееся множество обозначим E.

Доказать, что оно нигде не плотно на $[0, 1]$ и совершенно.

3.29. Доказать, что множество всех многочленов плотно в пространств $\subset[0, 1]$.

Решение. Приведём аппронсимационную теорему Вейерштрасса: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\mathcal{E} > 0$ существует такой многочлен $P(x)$, что для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|f(x) - p(x) < \mathcal{E}$.

Пусть ɥ - произвольный элемент пространства $\subset[0, 1]$. Согласно определению расстояния в $\subset[0, 1]$, окрестность V(ɥ,Ɛ) состоит из всех функций $f(x) \in\subset [0, 1]$ таких, что ɥ(x) −Ɛ<ɥ(x) + Ɛ для всех $x \in [0, 1]$.

Но согласно теореме Вейерштрасса, существует такой многочлен $P(x)$, что ɥ(x) −Ɛ<ɥ(x) + Ɛ для всех $x \in [0, 1]$, таким образом, множество многочленов плотно в $\subset$[0,1].

3.30. Доказать, что множество функций $y = nx^2, n$ – целое, является нигде не плотным в пространстве $\subset[0, 1]$.

3.31. Доказать, что множество точек $\sin r, r -$ любое рациональное число, плотно на $[-1, 1]$.

§4. Непрерывные отображения.

Принцип сжатых отображений.

Пусть f – отображение множества A метрического пространства X в метрическом пространстве Y, так что $A \subset X$ область определения отображения f, а $f(A) \subset Y$ – его область значений. Отображение f множества $A \subset X$ в пространстве Y называется непрерывным в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V(x_0)$, что для всех $x \in V(x_0)$ имеет место неравенство $p(f(x), f(x_0) < \varepsilon$ (определение Коши).

Это определение равносильно следующему: отображение f непрерывно в точке x_0, если из условия $x_n \to x_0$ ($\{x_n\}$ – последовательность точек из A) имеет место $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ (Определение Гейне).

Отображение f метрического пространства X в метрическом пространстве Y называется сжимающим, если существует такое число K, $0 < K < 1$, что для любых $x' \in X, x'' \in X$ имеет место

$$p(f(x'), f(x'') \leq Kp(x', x'').$$

Очевидно, что сжимающее отображение непрерывно на X.

Если отображение f полного метрического пространства X на себя является сжимающим, то существует, при том единственная, точка $x_0 \in X$такая что $x_0 = f(x_0)$ (такая точка называется неподвижной точкой отображения f). (Банах)

4.1. Имеет ли отображение $f(x) = 5x^2 + 2x + 3 - 2\sin x$ числовой прямой в себя неподвижные точки?

Решение. Если x_0 неподвижная точка отображения в себя, то она удовлетворяет уравнению

$x_0 = 5x_0^2 + 2x_0 + 3 - 2\sin x_0$ или $5x_0 + x_0 + 3 = 2\sin x$

Однако это уравнение какое-бы ни было x_0 не имеет корней, т.к. правая часть ≤ 2, а правая часть $\geq 3{,}6$.

4.2. Найти неподвижные точки отображения $(x, y) \to (u, v)$:

$$\begin{cases} u = x(y-1) - 2y^2 + 5y + x - 3 \\ v = -x(y+1) + 5 \end{cases}$$

пространства R^2 в себя.

Решение. Если (x, y) неподвижные точки, то

$$\begin{cases} x = x(y-1) - 2y^2 + 5y + x - 3 \\ y = -x(y+1) + 5 \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} xy - x - 2y^2 + 5y - 3 = 0 \\ -xy - x - y + 5 = 0 \end{cases} \text{ или}$$

$$-x + 2y - y^2 + 1 = 0$$

(1,0) и (1,2)

4.3. Найти неподвижные точки отображения $f(y) = y^2(x) - y(x) - x^2$ пространства [0,1] в себя.

4.4. Показать, что функция $f(x) = x^2$ отображает промежуток $[0, \frac{1}{3}]$ в себя. Является ли это отображение сжимающим?

Решение. Так как $f(x) = 4x(1-x)$, то $f(x) \geq 0$ при $x \in [0,1]$, а из того, что $f(x) - 1 = -(2x-1)^2 \leq 0$, получаем, что $f(x) \leq 1$. Таким образом действительно f отображает [0,1] в себя.

Рассмотрим $x_1 = 0$ и $X_2 = \frac{1}{2}$. Так как $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 1$, то

$\rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) = 1 > \frac{1}{2} = \rho(x_1, x_2)$.

Отсюда следует, что f не является сжимающим отображением.

4.6. Является ли сжимающим отображение $f(x) = x + \frac{1}{x}$ полупрямой $[1, \infty)$ в себя?

Решение. Имеем

$\rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) = |(x_1) - f(x_2)| = \left|(x_1 - x_2) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)\right| =$

$|x_1 - -x_2| \left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right)$.

Так как $x_1 x_2 \geq 1$, то получаем неравенство $\rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq \rho(x_1, x_2)$, которое, однако, еще не означает, что отображение сжимающее. Для сжимающего отображения должно выполняться неравенство

$\rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq \alpha \rho\big(x_{1,} x_2\big)$, где $0 < \alpha < 1$.

В этом случае такого подобрать невозможно, поскольку выражение $1 - \frac{1}{x_1 x_2}$ при достаточно больших $x_1 x_2$ ставится сколь угодно близким к единице. Итак, не является.

4.7. Является ли сжимающим отображение $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ промежутка $[2, \infty)$ в себя?

4.8. Доказать, что отображение $A_y = q \int_0^x y(t)\,dt$ пространства C [0,1] в себя является сжимающим при $0 < q < 1$.

Решение.
$|Ay_1(x) - Ay_2(x)| = q\int_0^x y_1(t)\,dt - q\int_0^x y_2(t)\,dt = q\left|\int_0^x (y_1(t) +\right.$
$+y2(t))dt \leq q0x|y1t-y2tdt \leq q\max 0 \leq t \leq 1|y1t-y2tx \leq q\rho(y1,y2).$

Отображение сжимающее

4.9. Пусть $f(x)$ – функция, заданная и дифференцируемая на отрезке [0,1], причем удовлетворяются неравенства $0 \leq f(x) \leq 1$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

Будет ли уравнение $f(x) - x = 0$ иметь решение?

4.10. Рассмотрим отображение A пространства $C[a,b]$ в себя, задаваемое формулой

Найти условия на λ, при котором отображение A будет сжимающим.

Решение. Пусть f_1 и f_2 произвольные точки пространства $C[a,b]$:
$\rho(Af_1Af_2) = Sup|Ay_1 - Ay_2| = Sup\left|\lambda\int_a^b K(x,y)f_1(y)dy -\right.$
$\lambda abKx,yf2ydy \leq Sup\lambda abKx,yf1(y)-f2(ydy \leq \lambda SupKx,yb-aSup|f1y-f2(y)|=\alpha\rho(f1f2)$, где $\alpha\lambda b-aSup|Kx,y|$ при $\alpha < 1$отображение является отображением сжатия.

Отсюда следует $|\lambda| < \frac{1}{(b-a)Sup|K(x,y)|}$, где Sup берется $(x,y) \in [a,b] \times [a,b]$.

4.11. Рассмотрим отображение A пространства множеств на отрезке [0,1] в себя:

$A(p) = \lambda\int_0^x P(y)dy + Q(x)$, где $Q(x)$ фиксированный многочлен.

В этом пространстве введена метрика

$$\rho(P_1P_2) = \max_{x\in[01]} |P_1(x) - P_2(x)|$$

Показать, что отображение является сжимающим только при $\lambda < 1$.

4.12. Задано отображение $(xy) \to (2x - 3y + 4, -x + 4y)$ пространства R^2 в себя.

Найти:

а) образ точки (2,3);

б) образ точки (-4,4);

в) образ биссектрисы первого и третьего координатных углов;

г) прообраз оси абсцисс.

Решение (г).

$$\begin{cases} u = 2x - 3y + 4 \\ v = -x + 4y \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$x = \frac{4}{5}u + \frac{3}{5}v - \frac{16}{5}$$

$$y = \frac{1}{20}(5x + 16) - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}u - \frac{4}{5} + \frac{4}{5}v$$

Полагая $v = 0$ получим

$$x = \frac{4}{5}u - \frac{16}{5}$$

$$y = \frac{u}{5} - \frac{4}{5}$$

Или $y = \frac{x}{4}$ прообраз оси абсцисс.

4.13. Задано отображение F:

$$y \to \int_0^1 (x^2 - y^3(x)\, dx$$

Пространства $C[0,1]$ в R. Найти

а) $F(\sin \pi\, x)$

б) Указать два элемента из прообраза $F^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

Решение (б). Имеем

$$\int_0^1 x^2 - y^3(x)dx = \frac{1}{3} \text{ или}$$

$$\frac{1}{3} - \int_0^1 y^3\,(x)dx = \frac{1}{3} \text{ т. е.}$$

$$\int_0^1 y^3(x)dx = 0$$

Отсюда $y = 0$ и $y = x - \frac{1}{2}$

т.е. $0, x - \frac{1}{2}$

4.14. Задано отображение $F(y) = y(1)$ пространства $C[0,1]$ в R^1 является ли это отображение непрерывным?

Решение. Пусть $y(x)$ – произвольный элемент пространства $C[0,1]$ и $y_n(x)$ – произвольная сходящаяся к $y(x)$ последовательность. Это означает, что $\lim_{n\to\infty} \rho(y_n y) =$ lim*n→∞max|ynx−yx|=0*

Рассмотрим последовательность образов:

$F(y_n) = y_n(1)$. Так как в матрице R^1 $p(F(y_n), F(y) = |F(y_n) - F(y)| = |y_n(1) - y(1)|$ и $|y_n(1) - y(1) \leq \max|y_n(x) -$ *yx=p(yn,y)*

Значит $p(F(y_n), F(y) \to 0$ или $F(y_n) \to F(y)$.

4.15. Задано отображение $F(y) = \int_0^1 |y'\,(x)|dx$ пространства E непрерывно-дифференцируемых функций пространства $C[0,1]$ в R^1. Является ли это отображение непрерывным на E?

Решение. Рассмотрим последовательность функций $y_n = \frac{1}{n}\sin 2\pi n\, x$.
(Очевидно эти функции $y_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на [0,1]).
и функцию $y_0(x) \equiv 0$ на [0,1].
Имеем
$p(y_n, y) = \max_{0\le x\le 1} \frac{\sin 2\pi nx}{n} = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$
т.е. $y_n(x) \to y_0(x)$. С другой стороны, $F(y_n) = 2\pi \int_0^1 |\cos 2\pi nx| dx$.

Для вычисления интеграла заметим, что отрезок [0,1] можно разбить на $4n$ частей длины $\frac{1}{4n}$ интеграла $\int_{\frac{k}{4n}}^{\frac{k+1}{4n}} |\cos 2\pi nx| dx$ для любого k: k=0,1,…,4n равны
Поэтому,
$$2\pi \int_0^1 |\cos 2\pi nx| dx = 2\pi * 4\pi \int_0^{\frac{1}{4n}} \cos 2\pi nx dx = 4 \sin 2\pi nx \Big|_0^{\frac{1}{4n}} = 4.$$
В то время как $F(y_0) = 0$.
Отображение F в точке y_0 терпит разрыв и поэтому не является непрерывным на E.

4.16. Задано отображение $F(y) = \max_{a\le x\le b} y(x)$ пространства $C[a,b]$ в R^1. Является ли отображение непрерывным?

4.17. Задано отображение $F(y) = \int_a^b y(x)dx$ пространства $C[a,b]$ в R^1. Является ли это отображение непрерывным?

4.18. Является ли непрерывным отображение $F(y) = y'(0)$ пространства M в R^1, где $M \subset C[0,1]$ состоит из дифференцируемых в $x = 0$ функций?

4.19. Доказать, что отображение F:
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to (y_1, y_2, \dots, y_m), \text{где}$$
$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Метрического пространства R^n в R^m тогда и только тогда непрерывно в точке $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, когда в этой точке непрерывны все m числовых функций $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Решение. Пусть F является непрерывным в точке $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, т.е. если последовательность $F(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ сходится в метрике R^n и $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то последовательность $F(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ сходится к $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$, т.е.

$$f_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \to f_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$$
$$f_2(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \to f_2(a_1, a_2, \dots, a_n)$$
$$f_m(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \to f_m(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Это означает, что функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ непрерывны в точке $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Пусть, далее, функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ непрерывны в точке $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, т.е. для любой последовательности $(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ сходящейся к $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $f_i(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \to a_i$ для $\forall i = 1,2, \dots, m$

$$F(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k, \text{есть} \quad f_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$$
$$f_2(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$$
$$f_3(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$$

В силу их непрерывности при $k \to \infty$ $f_1(a_1, a_2, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, a_2, \dots, a_n)$, т.е. $F(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \to F(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

§5. Мера множества. Измеримые множества.

Мерой интервала (a, b) называется его длина.

$$m(a, b) = b - a.$$

Если G – открытое множество на прямой, то $mG = \sum mJ_k$, где J_k – составляющие интервалы множества G.

Если открытое ограниченное множество G является объединением конечного числа или счетного множества взаимно не пересекающихся открытых множеств G_n, то $mG = \sum_k mG_k$.

Мерой непустого ограниченного замкнутого множества F называется число $mF = B - A[C_S F]$, где $S = [A, B]$ наименьший элемент, содержащий F.

Вешней мерой m^*E ограниченного множества E называется $m^*E = \inf\{mG\}$ $E \subset G$.

G – всевозможные открытые множества содержащие E.

Внутренней мерой m_*E ограниченного множества E называется

$$m_*E = \underset{FCE}{Sup}\{mF\}$$

F всевозможные замкнутые множества содержащихся в Е.

Ограниченное множество Е называется измеримым, если

$$m_*E = m^*E = m$$

Свойства измеримых множеств и их мер:

1. Если E измеримо, то CE измеримо.
2. Если $m_*E = 0$, то E измеримо. Такие множества называются множествами меры нуль. Любые подмножества множества меры нуль измеримо и имеет меру нуль.

3. Добавление к измеримому множеству или изъятие из нгего множества меры нуль не нарушает его измеримости и не изменяет его меры.
4. Если E и F – измеримы такие, что $E \subset F$, то $mE \leq mF$ (монотонность меры)
5. Объединение любой конечной или счётной совокупности измеримых множеств $\{E_n\}$ есть измеримое множество причём
$$m\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_n mE_n$$
(полуаддитивность меры)
6. Для объединения любой конечной или счётной совокупности попарно не пересекающихся измеримых множеств $\{E_n\}$ справедливо равенство
$$m\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n mE_n$$
(счётная аддитивность меры)
7. Если E и F измеримы, то $E \setminus F$ также измеримо; если при этом $F \subset E$ и $mE < +\infty$, то $m(E \setminus F) = mE - mF$.
8. В R^1 существует неизмеримое множество. Более того всякое измеримое множество, мера которого больше нуля, содержит неизмеримое подмножество.

5.1 Пусть $E \subset R^1$. Доказать равносильность следующих утверждений:

1) E – измеримо
2) Для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество G такое, что $E \subset G$ и $m^*(G \setminus E) < \varepsilon$.
3) Для каждого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество F такое, что $F \subset E$ и $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$.

Решение:

Докажем, что из (1) следует (2).

Сначала докажем, что для любого множества $E \subset R^1$ конечный внешней меры и для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество A: $E \subset A$, что $mA - \varepsilon < m^*E \leq mA$.

По определению внешней меры, существует покрытия$\{G_n\}$ множества E интервалами такое, что
$$\sum_m mG_n < m^*E + \varepsilon$$
Положим

$$A = \bigcup_n G_n$$

получим:A – открыто $A \supset E$, $m^*\mathrm{E} \leq m^*\mathrm{A}$, поскольку A имеет конечную внешнюю меру, и внешняя мера монотонна. Далее

$$mA \leq \sum_n mG_n < m^*E + \varepsilon \text{ т.е.}$$

$$mA - \varepsilon < m^*\mathrm{E} \leq \mathrm{mA}$$

Положим

$$E_n = E \cap \overline{D}(-n, n)\text{, где}$$

$$\overline{D}: -n \leq x \leq n. n \in N \text{ тогда}$$

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

По условию E – измеримо, значит все E_n – измеримы.

В силу вышеизложенного при заданном $\varepsilon > 0$ для каждого n существует открытое множество $G_n \supset E_n$ такое, что $mG_n < mE_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Тогда

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

открытое множество содержащее E. Так как

$$G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)$$

то,

$$m(G \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n \setminus E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (mG_n - mE_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon\,.$$

Пусть теперь выполнено условие (2), докажем, что выполняется условие (1) т.е. E – измеримо. Для каждого n существует открытое множество $G_n \supset E$ такое, что $m^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$. Тогда для множества

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

будем иметь: $A \supset E, m^*(A \setminus E) \leq m^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$ при любом n, значит $m^*(A \setminus E) = 0$. Отсюда следует, что E измеримо, т.к. $mE = mA - m(A \setminus E)$

Итак, (1) и (2) эквиваленты. Условия (2) и (3) равносильны измеримости множества E, любое из них можно принять за определение измеримого множества.

5.2. Может ли равняться нулю мера множества, которое содержит хотя бы одну внутреннюю точку.

Решение.

Допустим, что E содержит внутреннюю точку x_0, тогда в E входит некоторая окрестность $\vee(x_0)$ точки x_0. Но тогда $mE \geq m\vee(x_0) > 0$

Не может.

5.3. Можно ли построить на отрезке $[a,b]$ замкнутое множество меры $b-a$ отлично от всего отрезка?

5.4. Доказать, что всякое измеримое множество E на прямой, имеющая положительную меру имеет мощность континиуума.

5.5. Для любого $0 < \alpha < 1$ построить совершенное нигде не плотное множество на отрезке $[0,1]$, мера которого равна α.

Решение. Пусть $0 < \alpha < 1$ и β такое что $\alpha + \beta = 1$.

Выделим в $[0,1]$ последовательность $\{a_n\}$ такую, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \beta$$

Исключим из $[0,1]$интервал длины a_1 с центром в середине отрезка; далее из оставшихся двух отрезков удалим интервалы длины $\frac{a_2}{2}$ с центрами в серединах этих отрезков; затем из оставшихся четырёх отрезков удалим интервалы длины $\frac{a_3}{2^2}$ с центрами в серединах этих отрезков и т.д. оставшееся множество обозначим E.

Мера CE – сумма длин интервалов

$$mCE = a_1 + 2\frac{a_2}{2} + 4\frac{a_3}{2^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \beta$$

Тогда $mE = 1 - \beta = \alpha$.

Множество E нигде не плотно.

Пусть (α, β) произвольный интервал $[0,1]$, если он не содержит E, то – доказано.

Допустим $x_0 \in (\alpha, \beta)$ и $x_0 \in E$.

$x_0 \in$ какому-то интревалу длины $\frac{a_k}{2^k}$

x_0 не может быть серединой отрезка, т.к. в следующем шаге интервал с точкой x_0 в середине удаляется, а $x_0 \in E$. Тогда в середине интервала длины $\frac{a_k}{2^k}$ удаляется интервал длины $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}$, который не содержит элементов из E.

E – совершенно. Покажем, что любая точка E является предельной точкой для E. Пусть $x_0 \in E$. Допусти от противного, что существует окрестность $V(x_0)$, не содержащее точек E, кроме x_0.

Однако тогда x_0 – середина удаленного интервала.

Значит x_0 не может принадлежать E

5.6. Пусть множество E на отрезке $[0,1]$ имеет меру нуль. Должно ли и его замыкание $\bar{E}$ быть множеством меры нуль?

5.7. Доказать, что если E_1 и E_2 – измеримые множества в R^1, то $mE_1 + mE_2 = m(E_1 \cup E_2) - m(E_1 \cap E_2)$.

5.8. Каково строение и какова меры множества E тех точек отрезка $[0,1]$, которые допускают разложение в десятичную дробь без использования цифры 7?

Решение. Разобьём отрезок $[0,1]$ на десять равных частей точками $0{,}1;\ 0{,}2;\ \dots;\ 0{,}9$

Удалим интервал $(0{,}7; 0{,}8)$*, оставшиеся у отрезков также разделим на десять равных частей и удалим интервалы* $(0{,}17; 0{,}18),\ (0{,}2740{,}28), \dots, (0{,}97; 0{,}98)$ *и т.д.*

Оставшееся множество обозначим через E.

Очевидно десятичная разложение точек E н содержит цифры 7.

Мера E – мера отрезка $[0,1]$ без меры суммы мер удаленных интервалов

$$\frac{1}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{81}{10^3} + \dots = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{9}{10}} = 1$$

$$mE = 1 - 1 = 0$$

5.9. Каково строение и какова мера множества тех точек отрезка $[0,1]$, десятичное разложение которых невозможно без цифры 7?

5.10. Каково строение и какова мера множества точек отрезка $[0,1]$, в разложении которых в бесконечную десятичную дробь фигурируют все цифры от 1 до 9?

5.11. Каково строение и какова мера множества тех точек отрезка $[0,1]$, которые допускают десятичное разложение без комбинации стоящих рядом цифр 2,2,2?

5.12. Пусть $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ – смежные интервалы нигде не плотного совершенного множества E меры 0,6, разложенного на отрезке $[0,1]$ и такого что $infE = 0, SupE = 1$. Опишем около каждой точки a_i, как около центра интервал u_i длины $\frac{b_i - a_i}{4}$; такие же интервалы v_i длины $\frac{b_i - a_i}{4}$ опишем около каждой точки b_i.

Покроет ли множество

$$\left(\bigcup_i u_i\right) \cup \left(\bigcup_i v_i\right)$$

всё множество E? Что можно сказать о мере множества

$$\left(\bigcup_i u_i\right) \cup \left(\bigcup_i v_i\right)$$

Решение. Мера объединения всех интервалов u_i и v_i не превосходит суммы их длин

$$m\left(\left(\bigcup_i u_i\right) \cup \left(\bigcup_i v_i\right)\right) \leq \sum_i \frac{b_i - a_i}{4} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{b_i - a_i}{4} = \frac{1}{2}\sum_i (b_i - a_i)$$

Но

$$\sum_i (b_i - a_i) = mCE = 1 - 0.6 = 0.4$$

Итак,

$$m\left(\left(\bigcup_i u_i\right) \cup \left(\bigcup_i v_i\right)\right) \leq 0{,}2$$

т.к. мера

$$\left(\bigcup_i u_i\right) \cup \left(\bigcup_i v_i\right)$$

меньше меры множества E, то это множество не может покрыть всего E.

5.13. Доказать, что если E – измеримое множество положительной меры на прямой, то в нём найдутся точки, расстояние между которыми рационально.

Решение. Используя счётность множества рациональных чисел отрезка $[a, b]$ занумеруем все рациональные числа этого отрезка

$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots.$

и для каждого натурального числа K обозначим через E_k множество, получившееся из E сдвигом на r_k, т.е. множество всех точек вида $x + r_k$, где r_k – фиксированное рациональное число. Мера при этом не меняется т.е. E_k имеет меру $\mu > 0$.

Если б они попарно не пересекались, то положив

$$H = \bigcup_k E_k$$

имели бы

$mH = mE_1 + mE_2 + \dots + mE_n + \dots = \mu + \mu + \dots + \mu + .. = +\infty,$

что невозможно, так как $H \subset [a, b + 1]$ и, значит $\mu H \leq b + 1 - a$.

Значит существуют хотя б два различных номер i и j, такие что $E_i \cap E_j \neq \emptyset$. Пусть $\lambda \in E_i \cap E_j$

Тогда $\lambda = x + r_i = y + r_j$, где $x, y \in E$, откуда

$|x-y| = |r_i - r_j| \neq 0$, так, что $\rho(x.y)$ – рационально.

5.14. Существует неизмеримое ограниченное множество.

Решение. Рассмотрим сегмент $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ и точки этого сегмента разобьём на классы. Отнесём две точки (x,y) в один класс; если $x-y$ – число рациональное. Например: пусть $x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ и $x+\tau$ множество $K(x)$, r – рациональное. В частности $x \in K(x)$. Покажем, что если $K(x) \neq K(y)$, то эти классы не пересекаются. От противного, пусть $z \in K(x) \cap K(y)$. Тогда $z = x + r_x = y + r_y$,

r_x, r_y, – рациональные числа. Отсюда

$$y = x + r_x - r_y \text{ и если } t \in K(y)$$
$$t = y + r = x + (r_x - r_y + r) = x + r'.$$

т.е. $t \in K(x)$ отсюда следует что $K(y) \subset K(x)$. Также логично показать, что $K(x) \subset K(y)$ т.е. $K(x) = K(y)$ получили противоречие.

Из каждого класса выберем по одной точке и обозначим A множество выбранных точек. Покажем, что A неизмеримо. Перенумеруем все рациональные числа сегмента $[-1,1]$ (это возможно, поскольку – это счётное множество)

$0, r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$

Обозначим A_k получаемое из множества A сдвигом на r_k , т.е. если $x \in A$, то $x + r_k \in A_k$

При сдвиге внутренние и внешнее меры не меняются, поэтому обозначим

$$m_* A_k = m_* A = \alpha$$
$$m_* A_k = m_* A = \beta$$

для любого K.

Убедимся, что $\beta > 0$. Заметим, что

$$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \subset \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

Пусть $x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, то x принадлежит в один из классов разбиения и пусть представитель этого класса в множестве A есть x_0 и $x - x_0$ – есть рациональное число, причём $x - x_0 \in [-1,1]$, значит

$$x - x_0 = r_k \text{ и } x \in A_k$$

Тогда

$$1 = m^* \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \leq m^* \left(\sum_k A_k\right) \leq \sum_k m^* A_k \text{ т.е.}$$
$$1 \leq \beta + \beta + \cdots \text{ т.е.} \beta > 0.$$

Покажем, что $\alpha = 0$.

Заметим, что $A_n \cap A_m = \emptyset$ при $n \neq m$

Пусть $z \in A_n \cap A_m$ отсюда

$$z = x_n + \tau_n$$
$$z = x_m + \tau_m$$

Значит $x_n = z - \tau_n$, $x_m = z - \tau_m$ различные точки, чего не может быть, т.к. $x_n - x_m = \tau_m - \tau_n$ рациональное число.

При любом K

$$A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

поскольку, если $x \in A_k$ то $x = x_0 + r_k$, где $|x_0| \leq \frac{1}{2}$; $|\tau_k| \leq 1$, так что

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]. \text{Отсюда}$$

$$3 = m_* \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \geq m_* \left(\sum_k A_k\right) \geq \sum_k m_* A_k \text{ т. е.}$$

$$\alpha + \alpha + \cdots \leq 3 \text{ значит } \alpha = 0.$$

Итак,

$$m_* A < m^* A \text{ т. е.}$$

множество A не измеримо.

Если E множество положительной меры можно проделать аналогичную процедуру, из чего будет следовать существование неизмеримого подмножества.

5.15. Пусть E неизмеримое множество на прямой, A – множество меры нуль на той прямой. Доказать, что множество $E \cap CA$ – неизмеримо.

Решение.

Представим E в виде объединения двух множеств:

$$E = (E \cap A) \cup (E \cap CA)$$

Поскольку A - множество меры нуль, а множество $E \cap A$ это часть множества A , то $E \cap A$ измеримо и его мера равно нулю. Если бы было измеримо множество $E \cap CA$,то было бы измеримо и множество E , чего нет. Значит $E \cap CA$ неизмеримо.

5.16. Доказать, что любое ограниченное измеримое множество на прямой, имеющее положительную меру, содержит измеримое подмножество меньшей меры

§6. Измеримые функции.

Числовая функция $f(x)$ определённая на множестве E , где E подмножество числовой прямой называется измеримой, если измеримо множество E и все множества $E(f(x) > a)$, для любых a, $-\infty < a < +\infty$. Под $E(f(x) > a)$ понимается множества тех $x \in E$ для которых $f(x) > a$. Аналогичный смысл имеют обозначения: $E(f(x) \geq a), E(f(x) < a)$, $E(f(x) = a), E(a < f(x) < b)$.

Для измеримости функции $f(x)$, заданной на измеримом множестве E, необходимо и достаточно, чтобы были измеримы все $E(f(x) \geq a)$, или чтобы были измеримы все $E(f(x) < a)$, или чтобы были измеримы все $E(f(x) \leq a)$.

Свойства измеримых функций:

1. Если две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ измеримы на E, то измеримы также их сумма, произведение, частное (последнее – при условии $f_2(x) \neq 0$ на E).
2. Если дана последовательность измеримых на E функций $f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$
   сходящаяся всюду на E к функции $F(x)$, то $F(x)$ измерима на E. Даже если соотношение $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x)$ выполняется не всюду, а лишь почти всюду (этот термин означает, что это свойство выполняется во всех точках множества E, кроме точек некоторого подмножества меры нуль), то и тогда $F(x)$ измерима на E.
3. Если две функции, определённые на E, отличаются друг от друга на множестве меры нуль, то они либо обе измеримы, либо обе неизмеримы.
   Функции отличающиеся друг от друга только на множестве меры нуль называются эквивалентными и обозначаются
   $$f(x) \sim g(x)$$
4. Если $f(x)$ измерима на E и если измеримое множество A является подмножеством множества E, то $f(x)$ измеримо на A.

6.1. Показать, что функция принимающая постоянное значение C во всех точках измеримого множества E, измерима на E.

Решение. Рассмотрим множество $E(f(x) < a)$, где $a < C$. Это множество $\emptyset$ $m\emptyset = 0$.

Пусть теперь $a \geq C$.

Тогда $E(f(x) < a) = E$ измеримо.

6.2. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она измерима.

Решение. Известно, что непрерывная $[a, b]$ функция ограничена, т.е.

$A \leq f(x) \leq B$ для любого $x \in [a, b]$.

Если $c < A$, то $E(f(x) < c) = \emptyset$ $-$ измерима. Если $c \geq B$, то $E(f(x) < c) = [a, b]$ $-$ измерима. Пусть теперь $A < c < B$. Множество $E(f(x) < c)$ открыто (см. 3.14), значит измеримо.

6.3. Является ли функция Дирихле, определённая, на сегменте $[a,b]$ измеримой?

(функция Дирихле $D(x)$ определяется как

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{если } x - \text{число рациональное}\\ 0, \text{если } x - \text{число иррациональное}\end{cases}$$

$x\in[a,b]$)

6.4. Показать, что $F(x)$ являющаяся пределом сходящейся последовательности $f_1(x),\ f_2(x),\dots$ непрерывных на $[a,b]$ функций, измерима.

6.5. Привести пример неизмеримой функции.

6.6 Доказать, что если функция $f^3(x)$ измерима на E ,то и $f(x)$ измерима на E .

6.7 Показать, что из того, что $f^2(x)$ измерима на E, еще не следует, что $f(x)$ измерима на E .

Решение. Пусть A – неизмеримое подмножество E (такая возможность следует из 5.13.)

Рассмотрим $f(x)$, определённую следующим образом

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ -1, & x\in CA\end{cases}$$

$E(f(x)>a)$, где $a\geq 1$ неизмеримо, значит $f(x)$ неизмеримо. С другой стороны $f^2(x)\equiv 1$ на E т.е.измерима.

6.8 Доказать, что если $f(x)$ измерима на E , то и $|f(x)|$ измерима на E . Показать на примере, что обратное утверждение неверно.

6.9. Доказать, что если функция $f(x)$ измерима на отрезке $[\alpha,\beta]$,где α и β любые числа, что $a<\alpha<\beta<b$, то она измерима и на всём отрезке $[a,b]$.

6.10. Доказать, что если функция $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на E , то функции

$$m(x)=min\{f(x),g(x)\} \text{ и}$$
$$M(x)=max\{f(x),g(x)\}$$

также измеримы на E .

Решение. Справедливы равенства

$$min\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$
$$max\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$

В самом деле. Если, например, $f(x)<g(x)$, то $f(x)-g(x)<0$, и

$$\frac{f(x)+g(x)-(g(x)-f(x))}{2}=f(x) \text{ и}$$
$$\frac{f(x)+g(x)+(g(x)-f(x))}{2}=g(x)$$

$m(x),M(x)$ измеримы, поскольку измерима $|f(x)-g(x)|$ (см.

6.8) и сумма измеримых функций измерима.

6.11. Доказать, что если функция $f(x)$ измерима на всяком отрезке $[\alpha,\beta]$ где $a<\alpha<\beta<b$, то она измерима и на всём отрезке $[a,b]$.

6.12. Определим функцию $[f(x)]_a^b$ следующим образом:

$$[f(x)]_a^b=\begin{cases} f(x), \text{если } a\le f(x)\le b \\ a, \text{если } f(x)<a \\ b, \text{если } f(x)>b \end{cases},$$

где a и b произвольно заданные числа (a,b) $(a<b)$. Доказать, что если функция $f(x)$ измерима на множестве E, то функция $[f(x)]_a^b$ также измерима на E.

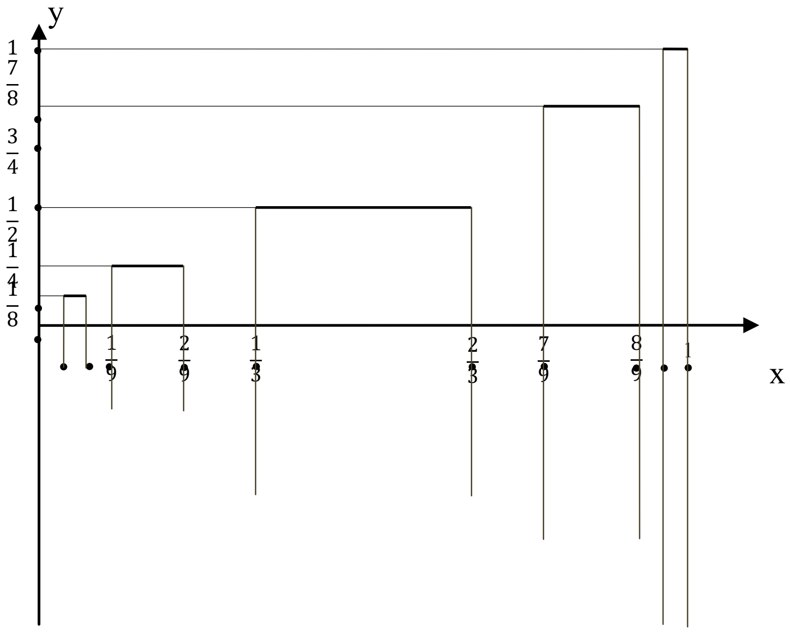
6.13. Пусть функция $f(x)$ измерима на множестве E; пусть E_0 измеримое подмножество множества E. Будет ли множество $f(E_0)$ измеримым?

Решение. Построим сначала функцию Кантора $\tau(x)$на $[0,1]$. Пусть D канторово множество. Зададим функцию $\tau(x)$ следующим образом: на смежном интервале первого ранга (интервалами -го ранга называются те смежные интервалы канторово множества, длина которых равна $\frac{1}{3^k}$).

Например: интервал $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ - это интервал 1 ранга. Смежные интервалы второго ранга это интервалы $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ на смежном интервале первого ранга положим $\tau(x)=\frac{1}{2}$; на смежном интервале 2 ранга, на левом интервале положим $\tau(x)=\frac{1}{2^2}$, на правом интервале $\tau(x)=\frac{3}{2^2}$; вообще, на смежных интервалах K – ранга (если двигаться слева направо) полагаем: $\tau(x)=\frac{1}{2^k}$: $\tau(x)=\frac{1}{2^k}$на самом первом интервале -го ранга, $\tau(x)=\frac{3}{2^k}$ на втором интервале, $\tau(x)=\frac{5}{2^k}$на третьем и т.д. на последнем интервале K-го ранга полагаем

$$\tau(x)=\frac{2^k-1}{2^k}$$

.



Таким образом функция $\tau(x)$ определена на всём CD и множество D относительно отрезка [0,1].

Она монотонна на CD . Доопределим функцию на D , положив для $x \in D$

$$\tau(x) = \underset{t<x, t\in CD}{Sup} \tau(t)$$

(т.е. в качестве значения в точке $x \in D$ принимается верхняя грань значений этой функции на той части множества CD , которая лежит слева от X .) Полагая, кроме того $\tau(0) = 0$ определяется функция $\tau(x)$ на всём отрезке [0,1].

Итак, $\tau(x)$ отображает [0,1] на весь отрезок $E_1 = [0,1]$ оси OY .

Построим теперь функцию $\Phi(x) = x + \tau(x)$, она возрастает и отображает отрезок [0,1] взаимно однозначно на отрезок [0,2] оси OY ; при этом множество CD перейдёт в множество меры 1 (т.к. согласно построению каждой интервал из CD перейдёт в интервал такой же длины) и, следовательно, множество D – в такое замкнутое подмножество F отрезка [0,2] оси OY , мера которого также равна 1 ,переходит D . Множество F (см. 5.13) содержит неизмеримое подмножество, обозначим A .

Построим теперь, функцию обратную $\Phi(x)$;обозначим её $\varphi(y)$. Она отображает отрезок $[0,2] \subset OY$ взаимно однозначно на отрезок [0,1] оси OX при этом множество F , мера которого равна 1 , переходит в D .

Образ $\varphi(A)$ этого множества будет частью канторово множества $D = \varphi(F)$. Но всякое подмножество множества меры нуль измеримо, тогда как его прообраз $A = \varphi^{-1}(B)$ неизмерим.

6.14. Пусть функция $f(x)$ измерима на множестве E ; пусть E_1 –

произвольное измеримое множество на числовой прямой. Обязано ли множество $f^{-1}(E_1)$ быть измеримым?

6.15. Пусть $\varphi(t)$ – измеримая на множестве E функция, $E_1 = \varphi(E)$-её множество значений. Пусть $f(x)$ –функция непрерывная на E_1 . Доказать, что суперпозиция этих функций $f\big(\varphi(t)\big)$ является измеримой функцией на E .

Решение. Вначале докажем, что если $f(x)$ – непрерывная функция, определённая в метрическом пространстве X, G – произвольная открытое множество на числовой прямой. Тогда множество $f^{-1}(G)$ открытого в X . В самом деле: пусть $x_0 \in f^{-1}(G)$; тогда $y_0 = f(x_0) \in G$. Пусть $\bigvee(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ – окрестность точки y_0 ,включающаяся в G . В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 , существует окрестность $\bigvee(x_0, \delta)$ такая, что для всех $x \in \bigvee(x_0, \delta)$ имеем:

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon \,, \text{т. е.}\, f(x) \in \bigvee(y_0) \subset G$$

Следовательно, $\bigvee(x_0, \delta) \subset f^{-1}(G)$, т.е. вместе с точкой $x_0 \in f^{-1}(G)$ в это множество входит некоторая окрестность точки x_0 . Значит $f^{-1}(G)$ – открытое множество. Пусть a – произвольное число. Тогда множество тех $x \in E_1$ для которых выполнено неравенство $f(x) > a$, есть прообраз открытого множества $(a, +\infty)$ числовой оси, потому открытого в E_1 (как доказано выше), т.е. является пересечением множества E_1 с некоторым открытым множеством Г числовой оси.

Поэтому условие $f\big(\varphi(t)\big) > a$ равносильно условию $\varphi(t) \in E_1 \cap \Gamma$, т.е. условию $\varphi(t) \in \Gamma$ (поскольку условие $\varphi(t) \in E_1$ выполняется для всех $t \in E$).

Следовательно, множество всех тех $t \in E$, для которых $f\big(\varphi(t)\big) > a$, есть прообраз $\varphi^{-1}(\Gamma)$ множества Г. Но если φ – измеримая функция, а Г –открытое множество, то множество $\varphi^{-1}(\Gamma)$ измеримо. Итак, для любого a множество всех тех t , для которых $f\big(\varphi(t)\big) > a$ измеримо. Значит функция $f\big(\varphi(t)\big)$ измерима.

Сходимость по мере.

Пусть E – измеримое множество конечной меры. Последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых на E функций называется сходящейся по мере и измеримой функции $\varphi(x)$ на E , если, для всякого числа $\delta > 0$ имеет место:

$$\lim_{n\to\infty} mE(|\varphi(x) - f_n(x)| > \delta) = 0$$

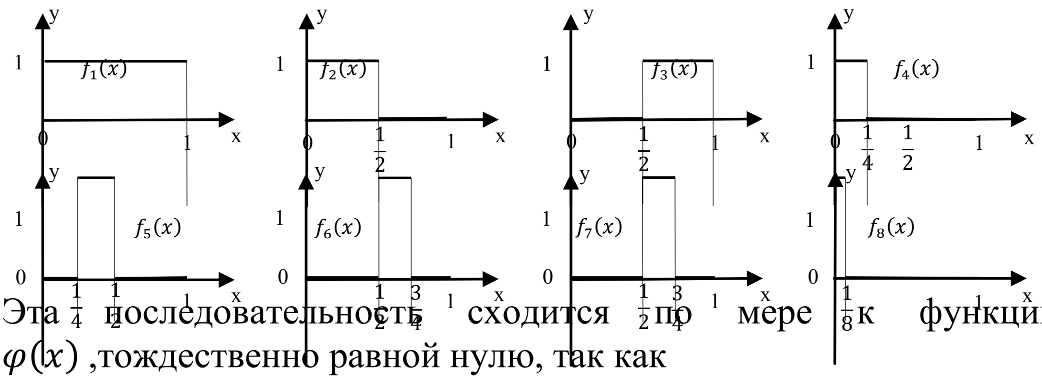
Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$,измеримых на множестве E конечной меры, сходится почти всюду на E к функции $\varphi(x)$,то она сходится к этой функции и по мере на E .

Таким образом, сходимость по мере является обобщением сходимости почти всюду.

Вместе с тем, эти понятия не совпадают: существует последовательность измеримых функций, сходящихся по мере на множестве конечной меры, но не сходящейся в обычном смысле нив одной точке множества E. Приведём такой пример.

Заметим сначала, что любое натуральное число n может быть представлено, и причём единственным образом, в виде $n = 2^k + i$, где $k = 0,1,2,\ldots,$ $0 \le i \le 2^k$. Зададим теперь на $E = [0,1]$ следующую последовательность функций $\{f_n(x)\}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{при } x \in \left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right], \\ 0, \text{в остальных точках отрезка } [0,1]. \end{cases}$$



Эта последовательность сходится по мере к функции $\varphi(x)$,тождественно равной нулю, так как

$$mE(|\varphi - f_n| > \sigma) = \begin{cases} 0, \text{при } \sigma \ge 1, \\ \frac{1}{2^k}, \text{при } 0 < \sigma < 1. \end{cases}$$

С другой стороны, $\{f_n(x)\}$ не сходится к нулю ни в одной точке множества $E = [0,1]$.

6.16. Пусть

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), \text{если } |f(x)| \le n, \\ 0, \text{если } |f(x)| > n \end{cases}$$

Будет ли $[f(x)]_n$ измерима на E , если $f(x)$ измерима на этом множестве?

6.17. Показать, что последовательность $\{x^n\}$ сходится на $[0,1]$ почти всюду к функции $f(x) = 0$. Проверить, что $\{x^n\}$ сходится к $f(x) = 0$ и по мере.

Пусть $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$– последовательности измеримых функций, сходящихся на множестве E по мере соответственно к измеримым функциям $f(x)$ и $g(x)$.

Доказать следующие утверждения: (задачи 6.18 – 6.25).

6.18. Последовательность $\{\alpha f_n(x)\}$, где α – число, сходится по мере к $\alpha f(x)$.

6.19. Последовательность $\{f_n(x) + g_n(x)\}$ сходится по мере к $f(x) + g(x)$.

6.20. Последовательность $\{|f_n(x)|\}$ сходится по мере к $f(x) + g(x)$.

6.21. Последовательность $\{f_n^2\}$ сходится по мере к нулю, если $f(x) = 0$ почти всюду.

6.22. Последовательность $\{f_n g\}$ сходится по мере к $f \cdot g$.

6.23. Последовательность $\{f_n^2\}$ сходится по мере к f^2.

6.24. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере к $f(x)$ на всяком измеримом подмножестве множества E.

6.25. Верны ли результаты задач 6.18 – 6.25 для сходимости почти всюду?

Решение. (6.19). Для любого $\sigma > 0$ справедливо соотношение

$$E(|(f+g)-(f_n+g_n)| > \sigma) \subset E\left(|f - f_n| > \frac{\sigma}{2}\right) \cup E\left(|g - g_n| > \frac{\sigma}{2}\right).$$

Действительно, если

$x \overline{\in} E\left(|f - f_n| > \frac{\sigma}{2}\right) \cup E\left(|g - g_n| > \frac{\sigma}{2}\right)$, то

$|f - f_n| \le \frac{\sigma}{2}, |g - g_n| \le \frac{\sigma}{2}$ и

$\left|\left(f(x) + g(x)\right) - \left(f_n(x) + g_n(x)\right)\right| \le |f(x) - f_n(x)| + \left|g(x) - g_{n(x)}\right| \le \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma$, т.е.

$x \overline{\in} E(|(f+g)-(f_n+g_n)| > \sigma)$. Из полученного включения следует:

$$mE(|(f+g)-(f_n+g_n)| > \sigma) \le mE\left(|f - f_n| > \frac{\sigma}{2}\right) + mE\left(|g - g_n| > \frac{\sigma}{2}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$ для любого фиксированного $\sigma > 0$. Следовательно $\{f_n + g_n\}$ сходится по мере к функции $f + g$.

Решение. (6.22). Последовательность множеств A и назовём монотонно убывающей ,если

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

Если A_n измеримы, причём $mE_1 < +\infty$, то

$$m\left(\bigcap_n E_n\right) = \lim_{n\to\infty} mE_n$$

Заметим далее, что $mE(|\varphi| > t) \to 0$ при $t \to \infty$, для любой измеримой функции φ на множестве E конечной меры, что следует из вышеприведенного рассуждения. Поэтому для произвольного

$\varepsilon > 0$ найдётся $t > 0$, такое что

$$mE(|g| > t) < \varepsilon$$

Из тождества

$f \cdot g - gf_n = g(f - f_n)$ следует

$|f \cdot g - gf_n| = |g| \cdot |f - f_n|$ и

$$E(|f \cdot g - gf_n| > \sigma) = E(|f| > t) \cup E\left(|f - f_n| > \frac{\sigma}{t}\right)$$

Тогда

$$mE(|f \cdot g - gf_n| > \sigma) \leq mE(|f| > t) + m\,E\left(|f - f_n| > \frac{\sigma}{t}\right)$$

переходя к пределу получаем, что

$\lim_{n\to\infty} mE(|fg - f_n g| > \sigma) = 0$.

т.е. последовательность f и g сходится по мере к $f \cdot g$.

Итак если последовательность f_n и g_n сходятся по мере к функциям f и g то и последовательность $\{f_n + g_n\}$ сходится по мере и функции $f + g$.

Покажем, на примере, что последовательность может не сходится ни в одной точке.

Пусть $E = [0,1]$ и рассмотрим две последовательности

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, \text{при } x \in \left[\dfrac{i}{2^k}, \dfrac{i+1}{2^{k+1}}\right] \\ 0, \text{в остальных точках } [0,1] \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, \text{при } x \in \left[\dfrac{i}{2^k}, \dfrac{i+1}{2^{k+1}}\right] \\ 0, \text{в остальных точках } [0,1] \end{cases}$$

Эти последовательности сходятся по мере к функции тождественно равной нулю на $[0,1]$

$$f_n(x) + g_n(x) = \begin{cases} 1, \text{при всех} x \in \left[\dfrac{i}{2^k}, \dfrac{i+1}{2^{k+1}}\right] \\ 0, \text{в остальных точках } [0,1] \end{cases}$$

Как было показано эта последовательность не сходится ни в одной точке отрезка $[0,1]$.

§ 7. Интеграл Римана и Лебега.

Пусть функция $f(x)$ задана на $[a, b]$. Разобьём $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ и назовём шагом λ этого разбиения максимальную длину интервалов (x_{i-1}, x_i) ,

$$\lambda = \max_i (x_i - x_{i-1})$$

Далее построим суммы

$$S = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i \text{ и } S = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i$$

где $\triangle x_i = (x_i - x_{i-1})$, $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i = \mathrm{Sup}_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

Эти суммы называются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу. Если существует общий предел верхних и нижних сумм Дарбу при стремлении шага разбиения λ к нулю, то этот предел называется интегралом Римана от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

$$(R)\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n m_i\triangle x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n M_i\triangle x_i$$

Если для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ существует пределы нижних и верхних сумм Дарбу и эти пределы равны друг другу, то говорят, что $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ по Риману. Справедливо следующее утверждение:

Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема по Риману на $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена на $[a,b]$ и мера множества её точек разрыва равнялась нулю (т.е. чтобы функция $f(x)$ была почти всюду на $[a,b]$ непрерывна).

7.1. Доказать, что из интегрируемости по Риману функции $f(x)$ на всяком отрезке $[\alpha,\beta]$, где $a<\alpha<\beta<b$, ещё не следует, что она интегрируема на $[a,b]$.

Решение. Рассмотрим функцию на $[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, \text{при } x\neq 0,\\ 0, \text{при } x=0\end{cases}$$

Эта функция не ограничена, следовательно на $[0,1]$ не интегрируема. Однако, она интегрируема на любом отрезке $[\alpha,\beta]$, где $0<\alpha<\beta<1$.

7.2. Интегрируема ли по Риману функция Дирихле на отрезке $[0,1]$

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{рациональное число}\\ 0, \text{иррациональное число.}\end{cases}?$$

7.3. Функция $f(x)$, определена на отрезке $[0,1]$ задана следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ в точках канторова множества}\\ 1 \text{ в точках его смежных интервалов.}\end{cases}$$

Решение. Будет ли $f(x)$ интегрируема по Риману? Эта функция ограничена на $[0,1]$. Все точки, принадлежащие смежных интервалов канторова множества, являются точками непрерывности этой функции. Все точки канторова множества – её точки разрыва (так как в любой окрестности канторова множества имеет меру нуль. Значит функция $f(x)$ интегрируема по Риману.

7.4. Может ли быть интегрируемой по Риману на $[a,b]$ функция, разрывная во всех точках некоторого непустого открытого множества $G\subset[a,b]$?

Интеграл Лебега от ограниченной функции.

Пусть $f(x)$ – ограниченная измеримая функция, определённая на измеримом множестве E прямой и принимающая значение строго между A и B: $A < f(x) < B$ для всех $x \in E$.

Разобьём отрезок $[A, B]$ оси OY точками $A = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = B$ и построим суммы

$$S = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m e_i \text{ ; } S = \sum_{i=1}^{n} y_i m e_i$$

где $e_i = E(y_{i-1} \leq f(x) < y_i)$. Эти суммы называются соответственно нижней и верхней суммами Лебега. Наибольшая длина отрезков $[y_{i-1}, y_i]$ при данном разбиении называется шагом разбиения и обозначается λ.

Если существует общий предел верхних и нижних сумм Лебега при стремлении шага разбиения к нулю, то функция $f(x)$ называется интегрируемой по Лебегу на множестве E и этот общий интеграл сумм Лебега называется интегралом Лебега от $f(x)$ по множеству E:

$$(L) \int_E f(x) dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m e_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i m e_i$$

Множество E называется при этом областью интегрирования. Если, в частности, областью интегрирования является отрезок $[a, b]$, то интеграл Лебега по этому множеству, записывается в виде:

$$(L) \int_a^b f(x) dx$$

или

$$\int_a^b f(x) dx$$

Всякая ограниченная измеримая на E функция интегрируема по Лебегу на этом множестве (предполагается, что E – множество конечной меры). Справедливы следующие свойства интеграла Лебега:

1. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и по Лебегу на этом отрезке, причём эти интегралы равны друг другу:

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (L) \int_a^b f(x) dx$$

2. Если $k \leq f(x) \leq K$ всюду на E, то

$$k \cdot mE \leq (L) \int_E f(x) dx \leq K \cdot mE$$

3. Если множество E конечной меры разбито на конечную или

счётную совокупность попарно не пересекающихся измеримых множеств E_k, то для любой измеримой ограниченной функции $f(x)$ имеет место

$$\int_E f(x)dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)dx$$

4. Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ограничены и измеримы на E, то для любых чисел α и β имеет место

$$\int_E \big(\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)\big)dx = \alpha \int_E \varphi(x)dx + \beta \int_E \psi(x)dx$$

5. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и измеримы на E, причём почти всюду $f(x) \leq \varphi(x)$, то

$$\int_E f(x)dx \leq \int_E \varphi(x)dx$$

В частности, если $f(x) = \varphi(x)$ почти всюду на E то

$$\int_E f(x)dx = \int_E \varphi(x)dx$$

6. Если $f(x)$ – неотрицательная измеримая ограниченная функция на E, причём

$$\int_E f(x)dx = 0$$

то $f(x) = 0$ почти всюду на E.

7. Если $f(x)$ измерима и ограничена на E, то

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leq \int_E |f(x)|dx$$

8. Если дана последовательность ограниченных измеримых функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ сходящаяся почти всюду на E к функции $F(x)$, и если существует такое число A, что $|f_k(x)| \leq A$ для всех k, то

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E F(x)dx$$

В задачах 7.5. -7.9 вычислить интегралы Лебега, опираясь на определения и используя условие существования:

7.5.

$$\int_a^b Cdx\,, c = const.$$

Решение. Отрезок $[a,b]$ измерим и мера его конечная $(b-a)$. Функция $f(x) = C$ ограниченная и измеримая. Итак интеграл Лебега существует.

Пусть A и B такие, что $A < C < B$, и $A = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = B$ разбиение, что

$$y_k = C \quad (k = 0,1,\dots,n)$$
$$e_i = E(y_{i-1} \leq C < y_i)$$
$$e_i = \emptyset, \text{при} i \neq k\text{ , при } i = k$$
$$e_k = [a,b], me_k = b - a$$

Тогда

$$\int_a^b \mathrm{C}dx = c(b-a).$$

7.6.

$$\int_0^1 xdx$$

Решение. $f(x) = x$ – непрерывно на отрезке $[0,1]$, следовательно измерима, и ограничена.

Интеграл Лебега существует. Для его вычисления разобьём $[0,1]$ на n равных частей

$$e_k = \left[\frac{k}{n}; \frac{n-1}{n}\right), \text{и } me_k = \frac{1}{n}$$

Тогда

$$\int_0^1 xdx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n} = \frac{1}{2};$$

7.7.

$$\int_a^b D(x)dx\,, \text{где } D(x) \text{ функция Дирихле. (см. 7.2).}$$

7.8.

$$\int_{P_0} f(x)dx\,, \text{где } P_0 - \text{канторово совершенное множество,}$$
$$f(x) - \text{огрниченная измеримая функция.}$$

7.9.

$$\int_E dx\text{, где } E \text{ измеримое множество}.$$

7.10. Интегрируема ли по Риману функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ в иррациональных точках} \\ 1 \text{ в рациональных точках}\end{cases}$$

на отрезке $[0,1]$. Интегрируема ли она по Лебегу? Чему равен её интеграл на отрезке $[0,1]$?

Решение. Эта функция не интегрируема по Риману. Она ограничена, однако она разрывна на множестве положительной меры – её точками разрыва являются все точки отрезка $[0,1]$, кроме точки $x=1$. По Лебегу это функция интегрируема, т.к. она ограничена и измерима. Для вычисления интеграла Лебега от $f(x)$ заменим подынтегральную функцию эквивалентной ей функцией $\varphi(x)=x^2$. (Они отличаются на множестве меры нуль).

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=(L)\int_0^1 \varphi(x)dx=(L)\int_0^1 x^2dx=(R)\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}.$$

7.11. Показать, что если $f(x)$ монотонна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема по Лебегу и

$$(L)\int_a^b f(x)dx=(R)\int_a^b f(x)dx$$

7.12. Вычислить

$$(L)\int_0^1 f(x)dx\text{, если}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ для } x \text{ иррациональных, больших } \dfrac{1}{3} \\ x^3 \text{ для } x \text{ иррациональных, меньших } \dfrac{1}{3} \\ 0 \text{ в рациональных точках.}\end{cases}$$

7.13. Вычислить

$$(L)\int_0^1 f(x)dx\text{, если}$$

$$f(x)=\begin{cases} \sin\pi x \text{ для } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\cap CD \\ \cos\pi x \text{ для } x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\cap CD \\ x^2 \text{ для } x\in D,\end{cases}$$

где D – канторово множество, а CD – его дополнение до всего отрезка $[0,1]$.

7.14. Пусть на отрезке $[0,1]$ функция $f(x)$ задана следующими условиями:

$f(x) = 0$ в точках канторова множества,

$f(x) = c_n$ в середине -го смежного интервала (a_n, b_n)

$f(x)$ линейна на участках

$$\left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right], \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right], n = 1,2, \dots$$

При этом предполагается, что смежные интервалы канторова множества перенумерованы в порядке убывания их длин:

$$(a_1, b_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), (a_2, b_2) = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), (a_3, b_3) = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

$$(a_4, b_4) = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right), (a_5, b_5) = \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right), \dots,$$

а последовательность C_n такая, что она сходится и $\lim \quad C_n = 0$. Доказать, что эта функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[0,1]$ и вычислить этот интеграл.

Решение. Эта функция ограничена, т.к. $f(x) = C_n$ в серединах смежных интервалов и $\{C_n\}$ сходится, следовательно ограничена.

Она измерима:

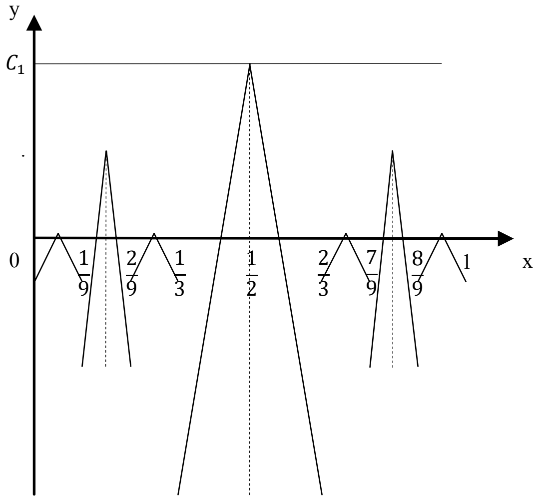
$E(f(x) > a)$ если $a < 0$ это отрезок $[0,1]$ для $0 < a < C_k \quad (k \in N)$

$E(f(x) > a)$ – конечная сумма некоторых смежных интервалов т.е. измерима.

Для вычисления интеграла разобьём область интегрирования на счётную совокупность попарно не пересекающихся интервалов и множеств.

$$[0,1] = D \cup (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \dots \cup (a_n, b_n) \cup \dots,$$

где D – канторово множество (a_n, b_n) его смежные интервалы, занумерованные в порядке убывания их длин, т.е. (a_1, b_1) – интервал длины $\frac{1}{3}$, (a_2, b_2) и (a_3, b_3) интервалы длины $\frac{1}{3^2}$, $(a_4, b_4), \dots, (a_7, b_7)$ – интервалы длины $\frac{1}{3^3}$ и т.д. При этом интервалы одинаковой длины нумеруются слева направо. Используя полную аддитивность интеграла Лебега, получим:



$$(L)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_D f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$$

Так как $mD = 0$, то первый интеграл равен нулю. Остальные интегралы вычисляются. На каждом интервале (a_n, b_n) функция интегрируема по Риману и поэтому

$$(L)\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = (R)\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx.$$

Интегралы Римана в данном случае равны площадям соответствующих треугольников

$$(R)\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = \frac{c_1\cdot\frac{1}{3}}{2}, \qquad (R)\int_{a_2}^{b_2} f(x)dx = \frac{c_2\cdot\frac{1}{3^2}}{2},$$

$$(R)\int_{a_3}^{b_3} f(x)dx = \frac{c_3\cdot\frac{1}{3^2}}{2}, \qquad (R)\int_{a_4}^{b_4} f(x)dx = \frac{c_4\cdot\frac{1}{3^3}}{2}, \ldots$$

$$(R)\int_{a_7}^{b_7} f(x)dx = \frac{c_7\cdot\frac{1}{3^3}}{2}, \qquad (R)\int_{a_8}^{b_8} f(x)dx = \frac{c_8\cdot\frac{1}{3^4}}{2}, \ldots$$

Суммируя получим формулу, дающую интеграл Лебега.

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^2} + \frac{c_4}{3^3} + \cdots + \frac{c_7}{3^3} + \frac{c_8}{3^4} + \cdots\right)$$

Этот ряд сходится, поскольку последовательность сходится, следовательно ограничена.

7.15. Пусть функция $f(x)$ измерима и ограничена на $[a, b]$. Тогда для $a < c < b$ имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Доказать.

7.16. Вычислить интеграл Лебега от функции $f(x)$ на отрезке $[0,1]$, если $f(x) = 10$ в точках канторова множества, а на смежных интервалах графиком функции служит верхние полуокружности, опирающиеся на эти интервалы, как на диаметры.

Решение.

Обозначим смежные интервалы канторова множества D, расположенные в порядке убывания их длин (α_n, β_n). Тогда

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_D f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx$$

Интеграл по D равен нулю, так как $mD = 0$; интегралы же по промежуткам (α_n, β_n) могут быть вычислены как интегралы Римана; следовательно, каждый из них равен площади соответствующего полукруга. Поэтому

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(\beta_n - \alpha_n)^2}{8}.$$

Но для канторова множества имеем:

$$\beta_1 - \alpha_1 = \frac{1}{3}, \qquad \beta_2 - \alpha_2 = \beta_3 - \alpha_3 = \frac{1}{3^2}, \qquad \beta_4 - \alpha_4 = \cdots$$

$$.. = \beta_7 - \alpha_7 = \frac{1}{3^3}, \qquad \beta_8 - \alpha_8 = \cdots = \beta_{15} - \alpha_{15} = \frac{1}{3^4} \text{ и т. д.}$$

Поэтому

$$(L)\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2^2}{3^6} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^{2n}}\right) = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{7} = \frac{\pi}{56}.$$

7.17. Чему равен интеграл Лебега на множестве $[0,1]$ от функции $f(x)$ равной x^2 во всех точках пересечения канторова множества и некоторого (даже неизмеримого) множества E и равной x^3 в остальных точках отрезка $[0,1]$.

7.18. Вычислить интеграл Лебега в функции $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), x - \text{рационально из}[0,1] \\ [\varphi(x)]^2, x - \text{иррационально из}[0,1], \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ – некоторая непрерывная функция на множестве точек отрезка $[0,1]$.

7.19. Вычислить интеграл Лебега по отрезку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функции $f(x) = D(x) \cdot \sin x$, где $D(x)$ – функция Дирихле.

7.20. Доказать, что

$$(L)\int_a^b f(x)\big(1-D(x)\big)dx=(L)\int_a^b f(x)dx,$$

где $D(x)$ – функция Дирихле, а $f(x)$ – любая функция, интегрируемая по Лебегу на отрезке $[a,b]$.

7.21. Найти интеграл Лебега от функции $f(x)$ на $[0,1]$:

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{если } x \text{ принадлежит канторову множеству,} \\ \dfrac{1}{2^n}, \text{если } x \text{ принадлжеит открытому канотрову} \\ \quad \text{множеству, тому из интервалов, длина} \\ \quad \text{котрого равна } \dfrac{1}{3^n}. \end{cases}$$

7.22. Вычислить интеграл Лебега от функции $f(x)=\sin nx$, по множеству E, если

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\ \ E_n=\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right],\qquad n=1,2,\ldots$$

7.23. Вычислить интеграл Лебега по множеству E от функции $f(x)$, если

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\ \ E_n=\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right], n=1,2,\ldots, \text{где } f(x)=(-1)^n, x \in E_n$$

7.24. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определенные на отрезке $[0,1]$ такие, что

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{если } x - \text{иррационально} \\ -x, \text{если } x - \text{рациоанльно} \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} n, \text{если } x - \text{рационально вида } x=\dfrac{m}{n} \\ 0, \text{если } x - \text{рациоанльно.} \end{cases}$$

Вычислить интеграл Лебега от функций
$F_1(x)=f[g(x)]$ и $F_2(x)=g[f(x)]$ по отрезку $[0,1]$.

Решение.

$$(L)\int_0^1 F_1(x)dx=\int_{E_1}F_1(x)dx+\int_{E_2}F_1(x)dx,$$

где E_1 – множество иррациональных точек отрезка $[0,1], E_2$ – множество рациональных точек. Если x – иррационально $g(x)=0$ и $f(0)=0$. Итак

$$\int_{E_1}F_1(x)dx=0$$

Если x – рационально, то $F_2(x)$ограничена и измерима и $mE_2 = 0$, значит

$$\int_{E_2} F_1(x)dx = 0.$$

Итак

$$\int_0^1 f[g(x)]dx = 0$$

З.Ш. Каримов

Теория функций действительной переменной.

Задачник – практикум и методические указания для студентов направления педагогическое образование, специальностей «математика – информатика», «математика – физика».

Подписано в печать 11.04.2022
Формат 60Х84/16. Компьютерный набор.
Гарнитура Times New Roman.
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. – 4,4. Уч.-изд. л. – 4,2.
Тираж 50 экз. Заказ №25