

МИНПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Башкирский государственный педагогический университет  
им. М. Акмуллы»  
(ФГБОУ ВО «БГПУ им. М.Акмуллы»)

УТВЕРЖДАЮ



Проректор по цифровому развитию  
и научной деятельности  
А.А. Фазлыев

**ПРОГРАММА**  
**КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА**  
**по научной специальности**  
**1.2.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика**

Программа составлена в соответствии с паспортом научной специальности  
1.2.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Уфа - 2022

## ВВЕДЕНИЕ

Кандидатский экзамен является формой промежуточной аттестации по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, соответствующим научной специальности 1.2.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Экзамен имеет целью проверку сформированности следующих компетенций:

- способности самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий;
- готовность использовать систематизированные теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления;
- способность применять основные методы асимптотического анализа интегралов с параметрами;
- способность применять основные методы асимптотического анализа дифференциальных уравнений с параметрами.

### Компетенции аспиранта и формы проверки их сформированности в рамках процедуры сдачи кандидатского экзамена

Компетентностная характеристика аспиранта	Формы проверки на кандидатском экзамене
	Устный экзамен
способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	1,2 вопрос
готовность использовать систематизированные теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления;	1,2 вопрос
способность применять основные методы асимптотического анализа интегралов с параметрами;	1,2 вопрос
способность применять основные методы асимптотического анализа дифференциальных уравнений с параметрами.	1,2 вопрос

## Структура билета

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов.

### СО Д Е Р Ж А Н И Е   К А Н Д И Д А Т С К О Г О Э К З А М Е Н А

#### **Введение**

Настоящая экзаменационная программа соответствует утвержденному паспорту научной специальности "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление". В основу программы положены следующие дисциплины: обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными, а также ряд отдельных вопросов функционального анализа и теории функциональных пространств. Программа разработана экспертным советом Высшей аттестационной комиссии по математике и механике при участии Математического института им. В.А. Стеклова и Московского энергетического института (технического университета).

#### **1. Обыкновенные дифференциальные уравнения**

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения.

Общая теория линейных уравнений и систем (область существования решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных и др.).

Автономные системы уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы.

Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению.

Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства), приложение к задачам быстрогодействия для линейных систем.

Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи.

Задача Штурма-Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными аргументами. Доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения методом мажорант.

Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.

Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. Теория Гамильтона-Якоби.

## **2. Уравнения с частными производными**

Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теория Коши-Ковалевской.

Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.

Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.).

Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.).

Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.).

Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье.

Пространства Соболева  $W_{p,m}$ . Теоремы вложения, следы функций из  $W_{p,m}$  на границе области.

Обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Задачи на собственные функции и собственные значения.

Псевдодифференциальные операторы (определение, основные свойства).

Нелинейные гиперболические уравнения. Основные свойства.

Монотонные нелинейные эллиптические уравнения. Основные свойства.

Монотонные нелинейные параболические уравнения. Основные свойства.

## **ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ**

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Общая теория линейных уравнений и систем (область существования решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля—Остроградского, метод вариации постоянных).
3. Автономные системы уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы.
4. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению.
5. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства), приложение к задачам быстрогодействия для линейных систем.
6. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными аргументами. Доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения методом мажорант.

7. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.
8. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. Теория Гамильтона—Якоби.
9. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теория Коши—Ковалевской.
10. Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.
11. Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.)
12. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.)
13. Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.)
14. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье.
15. Пространства Соболева. Теоремы вложения, следы функций из  $W^m_p$  на границе области.
16. Обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Задачи на собственные функции и собственные значения.
17. Псевдодифференциальные операторы (определение, основные свойства).
18. Нелинейные гиперболические уравнения. Основные свойства.
19. Монотонные нелинейные эллиптические уравнения. Основные свойства.
20. Монотонные нелинейные параболические уравнения. Основные свойства.
21. Спектр самосопряженного компактного оператора.
22. Теоремы Фредгольма для эллиптического уравнения второго порядка со спектральным параметром.
23. Теорема о повышении гладкости.
24. Теоремы существования и единственности для параболического уравнения второго порядка.
25. Дифференциальные свойства обобщенных решений.
26. Оценка потенциала двойного слоя в нормах Гельдера.
27. Оценка ньютонова потенциала в нормах Гельдера, оценка решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве.

28. Априорная оценка Шаудера для эллиптического уравнения второго порядка.
29. Метод Лапласа асимптотического разложения интегралов.
30. Асимптотические ряды, их основные свойства, существование функции с заданным асимптотическим разложением.

#### **Основная литература:**

1. Захаров, Е. В. Уравнения математической физики: [учеб. для аспирантов вузов] - М.: Академия, 2010.
2. Бибииков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие - СПб. ; М.; Краснодар: Лань, 2011.

#### **Дополнительная литература:**

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Наука, 1971 г.
2. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 1996 г.
3. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Наука, 1961 г.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1963 г. (и другие издания).
5. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985 г.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: ГИТТЛ, 1977 г.
7. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978 г.

### **Особенности процедуры проведения кандидатского экзамена Форма проведения экзамена**

Для подготовки к ответу аспиранту предоставляется не менее 40 минут. Допускается одновременная подготовка не более 5 человек, включая отвечающего.

На ответ на экзамене каждому аспиранту предоставляется не более 1 часа.

#### **Критерии оценивания**

Ответ аспиранта на экзамене оценивается на закрытом заседании экзаменационной комиссии, представляет собой среднее арифметическое всех оценок, полученных аспирантом на каждом этапе аттестационного испытания (по трем вопросам билета), с учетом среднеарифметической оценки исходя из ФПА, и определяется оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» «неудовлетворительно».

Общие подходы к определению уровня сформированности компетенций аспирантов на экзамене следующие:

Уровни	Содержательное	Основные признаки выделения	Пятибалльная
--------	----------------	-----------------------------	--------------

	описание уровня	уровня (критерии оценки сформированности)	шкала (академическая) оценка
Повышенный	Творческая деятельность	<i>Включает нижестоящий уровень.</i> Умение самостоятельно принимать решение, решать проблему/задачу теоретического или прикладного характера на основе изученных методов, приемов, технологий.	Отлично (5)
Базовый	Применение знаний и умений в более широких контекстах учебной и профессиональной деятельности, нежели по образцу, с большей степенью самостоятельности и инициативы	Включает нижестоящий уровень. Способность собирать, систематизировать, анализировать и грамотно использовать информацию из самостоятельно найденных теоретических источников и иллюстрировать ими теоретические положения или обосновывать практику применения.	Хорошо (4)
Удовлетворительный	Репродуктивная деятельность	Изложение в пределах задач курса теоретически и практически контролируемого материала	Удовлетворительно (3)
Неудовлетворительный	Отсутствие признаков удовлетворительного уровня		неудовлетворительно (2)

### **Дополнительные критерии оценки устного ответа**

Критериями оценки сформированности компетенций будут выступать следующие качества знаний:

-полнота – количество знаний об изучаемом объекте, входящих в программу;

-глубина – совокупность осознанных знаний об объекте;

-конкретность – умение раскрыть конкретные проявления обобщенных знаний (доказать на примерах основные положения);

-системность – представление знаний об объекте в системе, с выделением структурных ее элементов, расположенных в логической последовательности;

-развернутость – способность развернуть знания в ряд последовательных шагов;

-осознанность – понимание связей между знаниями, умение выделить существенные и несущественные связи, познание способов и принципов получения знаний.

Результаты сдачи кандидатского экзамена объявляются устно председателем экзаменационной комиссии по окончании закрытого заседания экзаменационной комиссии, заполнения экзаменационной ведомости, подписания протоколов экзаменационной комиссии.

Программа кандидатского экзамена составлена доктором физ.-мат. наук, профессором Д.И. Борисовым.  
Программа утверждена на заседании кафедры математики и статистики.

Протокол « \_\_\_\_ » от \_\_\_\_\_ 2022 г.